

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Tomislav Vujević

DEMONSTRACIJSKI POKUSI U NASTAVI  
FIZIKE: HARMONIJSKI OSCILATOR

Diplomski rad

Zagreb, 2018.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA; SMJER: NASTAVNIČKI

**Tomislav Vujević**

Diplomski rad

**Demonstracijski pokusi u nastavi fizike:  
harmonijski oscilator**

Voditelj diplomskog rada: doc.dr.sc. Dalibor Paar

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2018.



## **Sažetak**

Fizika je prirodna znanost i temelji se na pokusu. Uloga pokusa u nastavi fizike je ogromna. Najvažnija uloga pokusa je motivirati učenike i zainteresirati ih za određenu temu. Izvođenje pokusa u nastavi fizike uvelike pridonosi kvalitetnijem znanju i razumijevanju fizikalnih sadržaja.

U ovom radu dajemo neke primjere u temi harmonijski oscilator, kako razvoj digitalnih tehnologija omogućava još veću kreativnost i inventivnost u osmišljavanju demonstracijskih pokusa uz mogućnost prikupljanja kvantitativnih podataka uz relativno nisku cijenu.

## **Demonstration experiments in teaching physics: Harmonic oscillator**

### **Abstract**

Physics is a science based on the experiment. The role of experiments in teaching physics is enormous. The most important role of the experiment is to motivate students and interest them for a specific topic. Performing experiments in teaching physics greatly contributes to better quality knowledge and understanding of physical content.

In this work, we give some examples in the subject harmonic oscillator how development of digital technologies allows us for even greater creativity and inventiveness in the design of demonstration experiments with the ability to collect quantitative data at a relatively low cost.

## Sadržaj

<b>1. Uvod</b>	2
<b>2. Projektna nastava</b>	3
2.1. Uloga projektne nastave	3
2.2. Motivacija učenika	3
2.3. Kako projektna nastava pomaže u životu?	5
2.4. Prednosti projektne nastave za nastavnike	6
<b>3. Harmonijski oscilator</b>	7
3.1. Općenito o titranju	7
3.2. Harmonijsko titranje	7
3.3. Harmonijsko titranje kao projekcija jednolikog gibanja po kružnici	10
3.4. Elongacija, brzina i ubrzanje harmonijskog oscilatora	11
3.5. Energija harmonijskog oscilatora	16
3.6. Matematičko njihalo	18
3.7. Prigušeno titranje harmonijskog oscilatora	19
3.8. Prisilno titranje harmonijskog oscilatora	21
<b>4. Demonstracijski pokusi vezani za harmonijski oscilator</b>	23
4.1. Slobodno (neprigušeno) titranje	23
4.2. Titranje jednostavnog njihala	31
4.3. Primjena njihala	35
4.4. Prigušeno titranje	39
4.5. Prisilno titranje	45
<b>5. Zaključak</b>	48
<b>6. Literatura</b>	49

## 1. Uvod

Mnogi smatraju fiziku teško razumljivim predmetom zbog formula koje ne razumiju i zbog fizikalnih problema koje ne mogu povezati sa svakodnevnim životom. Fizika je bazirana na promatranju prirode, odnosno fizikalnom pokusu. Da bi približili fiziku učenicima, treba krenuti od zanimljivih pokusa koji učenike potiču da postavljaju pitanja zašto i kako.

Osim motivacije za učenje, pokus kod učenika potiče kreativnost i znatiželju, opažanje i logičko zaključivanje. Izvođenje pokusa u nastavi fizike uvelike pridonosi stjecanju trajnih znanja i razumijevanja fizikalnih sadržaja.

U ovom radu ćemo prikazati, kako je u okviru odabrane fizikalne teme uz upotrebu suvremenih tehnologija i bez velikih financijskih izdataka moguće izvesti nastavu fizike izgrađenu na pokusu. Rad je koncipiran u tri dijela.

U prvom dijelu govorimo o istraživački orijentiranoj i projektnoj nastavi kao suvremenom načinu učenja kojim stječemo trajna znanja i vještine u fizici.

U drugom dijelu objašnjeni su osnovni fizikalni koncepti vezani uz harmonijski oscilator, potrebni za razumijevanje izvedenih pokusa.

U trećem dijelu je prikazan skup pokusa kojima se proučava gibanje harmonijskog oscilatora. Izveli smo pokuse u kojima smo promatrali slobodno titranje, prigušeno titranje i prisilno titranje utega na opruzi i jednostavnog njihala.

Naglasak je stavljen na pokuse sa lako dostupnim priborom. Većinu tih pokusa učenici mogu sami izvesti kod kuće slijedeći upute u radu i koristeći pribor koji nam je dostupan u svakodnevnom životu kao što su mobitel, uteg, opruga, boca, različite tekućine, šećer, stolica, metla, gumica i ostalo.

Budući da u mnogim hrvatskim školama nema gotovih (komercijalnih) pribora za izvođenje pokusa, nastavnici ih mogu zamijeniti s dobro osmišljenim pokusima baziranim na dostupnim ili jeftinim potrošnim materijalima. Vrijednost takvih pokusa je i u tome što ih učenici mogu sami izvesti kod kuće, posebice kao dio projektne nastave, pri čemu nisu pasivni promatrači, već sami istražuju, prikupljaju podatke i donose zaključke.

## **2. Projektna nastava**

### **2.1. Uloga projektne nastave**

Suvremena nastava fizike danas bazirana je na istraživački orijentiranoj ili na projektnoj nastavi. Kako pokusi prikazani u ovom radu omogućavaju samostalan rad učenika ili u grupama, ovdje ćemo se orijentirati na projektnu nastavu. Projektna nastava pruža mogućnost učenicima da grade kvalitete kao što su: odgovornost, timski rad, neovisan rad, kritičko razmišljanje, samouvjerenost, kvalitetno upravljanje vremenom i dobra međusobna komunikacija. Projektna nastava pomaže da učenici dublje nauče tradicionalni sadržaj i shvate kako se odnosi na stvarni svijet. Neki zagovornici projektne nastave smatraju da će ona potaknuti i motivirati pasivne učenike, vratiti radost poučavanja, obnoviti zajednice, pomoći u rješavanju svjetskih problema i dramatično povećati rezultate na testovima. Možemo sa sigurnošću reći da je učenje temeljeno na projektu moćna metoda poučavanja koja čini sljedeće:

- Motivira učenike
- Priprema učenike za daljnje školovanje i izbor zanimanja
- Pomaže učenicima da primjenjuju dubinsko znanje i vještine razmišljanja
- Omogućuje nastavnicima zanimljiviju i dinamičniju nastavu
- Pruža školskim ustanovama novi put komuniciranja i povezivanja s roditeljima, zajednicama i svijetom.

### **2.2. Motivacija učenika**

Osnovnoškolska djeca obično su motivirana učiti i napredovati u školi jer dolaze s prirodnom željom da upoznaju svijet i istražuju ga. Oni žele čitati, pisati i koristiti brojeve. Također imaju tendenciju da se svide svojim učiteljima, a metode podučavanja - osobito u nižim razredima - često još uvijek imaju element zabave i igranja (što je prema suvremenim istraživanjima vrlo poželjno). No mlađi učenici mogu se umoriti od radnih listova, vježbi ili drugih tradicionalnih nastavnih metoda ako se takvi pristupi previše koriste. Kada stignu u srednju školu, osobito u gimnaziju, mnogi učenici navode da u većini slučajeva nisu angažirani u školi. Neke možda još uvijek mogu motivirati želja da steknu dobre ocjene i zadovolje svoje učitelje i roditelje, ali i dalje previše jednostavno prolaze kroz slušanje



predavanja, dovršavanja zadataka, obavljanja zadaće i učenje za testove. Općenito govoreći, učenici se potiču na učenje vanjskim čimbenicima, a ne stvarnom potrebom da znaju – prirodnom znatiželjom, što je jedan od ključeva za motivacijski učinak projektnog (i istraživački orijentiranog) učenja. Većina učenika kaže kako im je često dosadno i sugerira da učitelji trebaju "predavati aktivno i zabavno" i pružiti priliku raspravljati o učeničkim idejama.

Iskusni učitelji znaju da kada su učenici duboko angažirani temom ili zadatkom, mnogi problemi s radnom atmosferom u učionici nestaju. Učenici koji ometaju nastavu ponašaju se drugačije kada su angažirani radom na projektu (Lambros, 2002). Učenici koji prethodno nisu obavljali svoje zadatke, ili se ponašali neodgovorno, postali su odgovorniji i pojačali kvalitetu rada kad se brinu o projektu. Iz tih rezultata jasno vidimo potrebu za poučavanjem koja je privlačnija, a projektno učenje je upravo to. Zanimljive i relevantne teme, pitanja i izazovi su središte za svaki dobro osmišljen projekt. Interakcija s učiteljem je također vrlo bitna u čitavom procesu. Rasprave i debate često se javljaju u projektima, bilo da sudjeluje cijeli razred ili da se to odvija u malim skupinama. Većina projekata danas uključuje tehnologiju do određene mjere, a prezentacije učenika također su ključni element (koji predstavlja i neovisno o temi, važnu vještinu za profesionalni razvoj).

U nizu zemalja javlja se problem da učenici napuštaju školu zbog dosade i nedostatka motivacije. U Hrvatskoj nije toliko problem napuštanja škole, koliko gubitka želje za učenjem, stjecanjem dubokih znanja i vještina. Uzrok tih problema je što učenici nisu angažirani te ne vide jasnu svrhu svog učenja. Projektni pristup adresira i jednu i drugu komponentu. Učenici postaju angažirani u tematici, a izvođenjem pokusa u realnom svijetu ono što rade povezuju s realnim problemima.

Ukoliko učenici dođu u srednju školu znatno ispod potrebne razine za nju, to će zahtijevati naporan rad. Za uspjeh su potrebne su ključne "navike uma", zajedno sa specifičnim znanjima i vještinama:

- Kritičko-mislilačke vještine
- Analitičko-mislilačke vještine
- Vještina rješavanja problema
- Otvoriti se i koristiti kritički komentar
- Otvorenost mogućim neuspjesima kroz vrijeme

- Jasna i uvjerena pismena i govorna ekspresija
- Izvući zaključke i doći do zaključaka samostalno
- Vještina upravljanja vremenom

Kada se poslodavce pitalo što je potrebno za uspjeh na radnom mjestu, uz znanje i vještine specifične za posao naveli su sličan popis znanja i vještina. Sasvim je jasno da učenici trebaju više od osnovnih znanja iz pojedinih područja. Kompetencije i osobne kvalitete uključene u ove različite popise dobile su mnoga imena: vještine 21. stoljeća, interdisciplinarne vještine, navike uma i rada, duboko učenje i vještine spremnosti za karijere. Mi ih nazivamo "vještinama uspjeha". Neke su stare kao Sokrat; neke su proizvodi suvremenog doba. No, može li tradicionalno školovanje ispuniti potrebu da ih poučava?

Iako su informacije o bilo kojoj temi dostupne u našem digitalnom dobu, ljudi još uvijek trebaju neko znanje iz pozadine kako bi mogli dati smisao informaciji i biti dobro zaokruženi, kulturno pismeni članovi društva. Učenje ključnih znanja i razumijevanje uvijek bi trebali biti jedan od paralelnih ciljeva, uz stjecanje ključnih uspješnih vještina. Uostalom, učenici trebaju o nečemu kritički razmišljati ili komunicirati u projektu i ne mogu riješiti problem jednostavno primjenom procesa bez znanja o sadržaju.

### **2.3. Kako projektna nastava pomaže u životu?**

Kad neki učitelji i roditelji čuju o projektnoj nastavi, mogli bi reći: „Ne bi li trebali učiti, slušati predavanja, raditi bilješke i pisati testove koji mjere koliko su informacija zapamtili?" Nudimo dva odgovora na ovu zabrinutost. Prvo, istina je da su slušanje i bilježenje važne vještine koje bi učenici trebali prakticirati u srednjoj školi, ali takve mogućnosti mogu biti uključene u projekt. Suprotno nekim stereotipima, još uvijek postoji prostor za predavanja u projektnoj nastavi. Tijekom projekta, najbolji način da učenici nauče nešto je kad osjete istinsku potrebu za time, a to može biti i predavanje učitelja. Ili bi u razred mogli dovesti stručnjaka i raditi bilješke. Isto tako, test znanja o sadržaju može biti učinkovit i neophodan alat za procjenu u projektu.

Na poslu, pa i tijekom obrazovanja, ljudi imaju koristi od posjedovanja liderskih vještina. Projekti pružaju učenicima, posebno onima koji nisu tipični vođe u učionici, višestruke i raznovrsne prilike za izgradnju takvih vještina. Jednako vrijedne su vještine samoupravljanja, kao što su sposobnost organiziranja nečijeg vremena i zadataka,

samostalan rad i poduzimanje inicijative. Strogi projekti zahtijevaju sve gore navedeno. Konačno, činjenica je u današnjem gospodarstvu da će većina ljudi nekoliko puta promijeniti poslove, zahtijevajući od njih da ostanu fleksibilni i da znaju kako naučiti nove vještine. Učenici stječu praksu uzimajući nove i raznovrsne uloge u projektima. U promjenjivom gospodarstvu osobne kvalitete poput upornosti i otpornosti biti će korisne. Projektno okruženje u školi pomaže u izgradnji tih mogućnosti, budući da učenici istražuju pitanja i probleme koji ih ne vode izravnim putem. Gotovo je očekivano da će svaki projekt uključivati neočekivane prijelaze, neuspjehe, preispitivanje ideja i priznanje da se nešto mora više naučiti.

#### **2.4. Prednosti projektne nastave za nastavnike**

U današnjoj eri standarda, testiranja i odgovornosti, mnogi se učitelji osjećaju ograničeno u njihovim izborima u nastavnom planu i poučavanju ili se zapravo kaže da moraju na određeni način poučavati. Škole u kojima dominira potreba za podizanjem rezultata testiranja tvrde da nemaju vremena za "suvišne stvari" (umjetnost i druge nedokazane predmete), povezivanje s zajednicom, korištenje tehnologije na nove načine ili podučavanje učenika kako raditi u timovima i raditi prezentacije. Mnogi nastavnici suočeni s tom situacijom još uvijek nađu načine ubrizgavanja njihove osobnosti u učionicu i čine njihovo učenje kreativnim i živim koliko mogu. Drugi se slažu s programom, ali umorni su od ograničenja i mržnje kad vide svoje učenike kako gube zanimanje za učenje kada svaki dan rade pomoću udžbenika, radnih listova i vježbi. Neki nastavnici čak napuštaju profesiju ili se presele u privatnu školu gdje mogu držati nastavu na zadovoljavajući način. Većina nastavnika želi planirati svoje lekcije i jedinice, a ne samo "isporučiti pouku" temeljenu na materijalima koji se ne mogu prenijeti ili na dugom maršu kroz udžbenik. Oni vole naučiti o temama i pitanjima za koje su oni i njihovi učenici zainteresirani. Žele vidjeti da se njihovi učenici aktivno angažiraju u učenju i da vole učiti nove stvari.

Projektno učenje je dakle strategija podučavanja, koja može omogućiti učenicima razvijanje dubokog razumijevanja i vještina potrebnih za napredovanje u današnjem složenom svijetu.

### 3. Harmonijski oscilator

#### 3.1. Općenito o titranju

Titranje je periodično gibanje tijela oko ravnotežnog položaja. U životu smo se susreli s raznim primjerima titranja kao što su titranje žica glazbenih instrumenata, titranje zraka tijekom prijenosa zvuka, njihanje djeteta na ljuljački, titranje čamca na površini mora itd. Tijelo koje titra nazivamo oscilator.

Jednostavni harmonijski oscilator može se sastojati od tijela obješenog na oprugu. Ako tijelo pomaknemo iz položaja ravnoteže i pustimo iz mirovanja, tijelo će se početi gibati prema ravnotežnom položaju i ubrzavati, a kad prođe ravnotežni položaj onda usporavati. Udaljenost tijela od ravnotežnog položaja nazivamo elongacijom. Maksimalnu udaljenost tijela od ravnotežnog položaja nazivamo amplitudom.

Vrijeme koje je potrebno da tijelo ponovno dođe u isto stanje gibanja kao na početku nazivamo periodom titranja  $T$ . Tijelo napravi jedan titraj za vrijeme trajanja jednog perioda.

Frekvencija titranja  $f$  je broj titraja tijekom vremena 1 s

$$f = 1/T. \quad (3.1)$$

Mjerna jedinica za frekvenciju je Hertz ( $\text{Hz} = \text{s}^{-1}$ ).

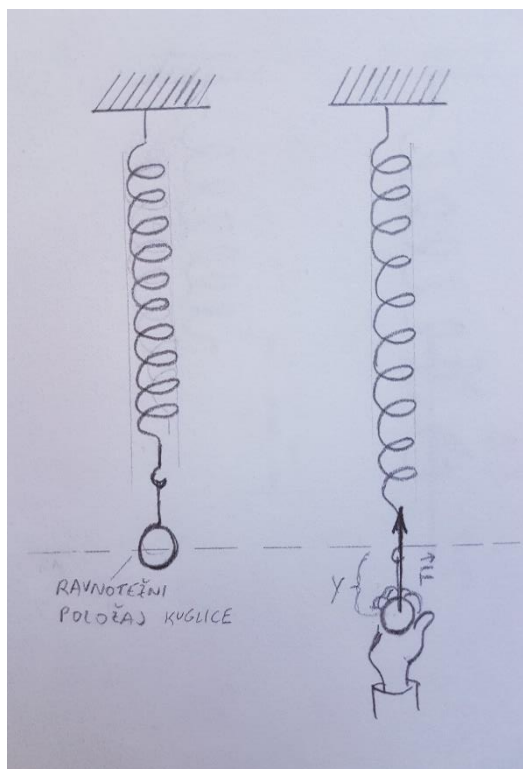
#### 3.2. Harmonijsko titranje

Najjednostavnije titranje s kojim se susrećemo je harmonijsko titranje (grč. harmonia = sklad). Takvo titranje je uzrokovano elastičnom ili harmonijskom silom koja je u svakom trenutku proporcionalna elongaciji  $y$ :

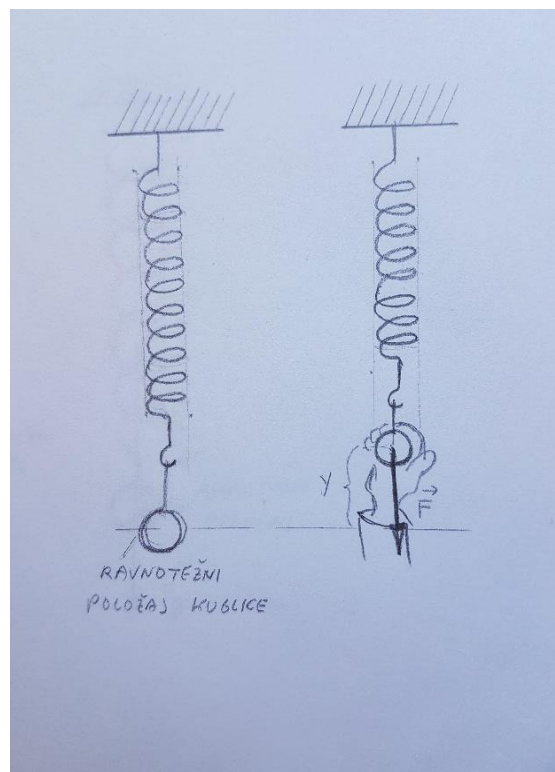
$$F = -k y \quad (3.2)$$

Tijelo ili sustav koji titra harmonijski zovemo harmonijski oscilator. Primjer harmonijskog oscilatora je titranje tijela mase  $m$  obješenog na elastičnu oprugu. U jednadžbi (3.2) se pojavljuje predznak minus zato jer su smjerovi elastične sile i elongacije suprotni. Elastična

sila opruge je zapravo povratna sila koja vraća tijelo u ravnotežni položaj. Smjer elastične sile je prema ravnotežnom položaju, a smjer elongacije je u odnosu na ravnotežni položaj.



Slika 1: Rastezanje opruge



Slika 2: Sabijanje opruge

Da bi opruga počela titrati, oprugu moramo rastegnuti ili stisnuti. Na taj način dovodimo energiju tom sustavu. Ako rastegnemo oprugu, smjer pomaka tijela je prema dolje (slika 1) pa elastična sila djeluje prema gore. Ako oprugu stisnemo, smjer pomaka tijela je prema gore (slika 2) pa elastična sila djeluje prema dolje.

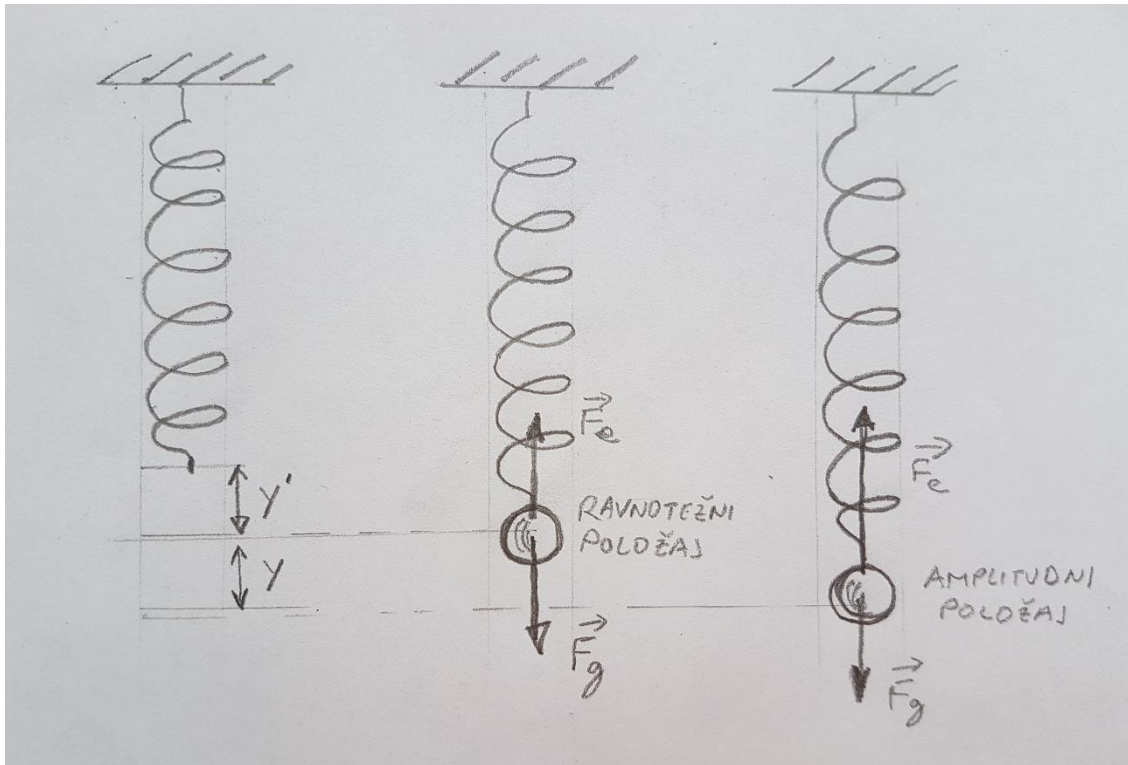
Konstanta opruge  $k$  u jednadžbi (3.2) ovisi o svojstvima opruge, tj. ovisi o materijalu od kojega je napravljena i njenom obliku. Svaka opruga ima svoju karakterističnu konstantu elastičnosti koju možemo odrediti eksperimentalno.

Promotrimo oprugu na koju ćemo objesiti tijelo mase  $m$  (slika 3). Znamo da se opruga rastezne kada na nju objesimo neko tijelo. Tada se javlja elastična sila koja pri produljenju opruge za duljinu  $y'$  ima jednak iznos kao sila teža:

$$F_e = F_g ,$$

odnosno

$$ky' = mg . \quad (3.3)$$



Slika 3: Tijelo na opruzi (dijagram sila za ravnotežni i amplitudni položaj)

Kada se elastična sila i sila teža izjednače po iznosu, dolazi do uspostave novog ravnotežnog položaja u odnosu na koji promatramo gibanje. Elastična sila ima smjer prema gore, a sila teža prema dolje. Ako povučemo tijelo iz ravnotežnog položaja prema dolje, tada se opruga produlji još za duljinu  $y$  i elastična sila je jednaka:

$$F_e = k(y' + y). \quad (3.4)$$

Kada tijelo pustimo iz amplitudnog položaja, tijelo se giba prema ravnotežnom položaju pod utjecajem rezultante elastične sile i sile teže:

$$F(\text{rez}) = k(y' + y) - mg = ky' + ky - mg. \quad (3.5)$$

Budući da je:

$$ky' = mg,$$

rezultanta je tada jednaka:

$$F = mg - ky - mg,$$

odnosno:

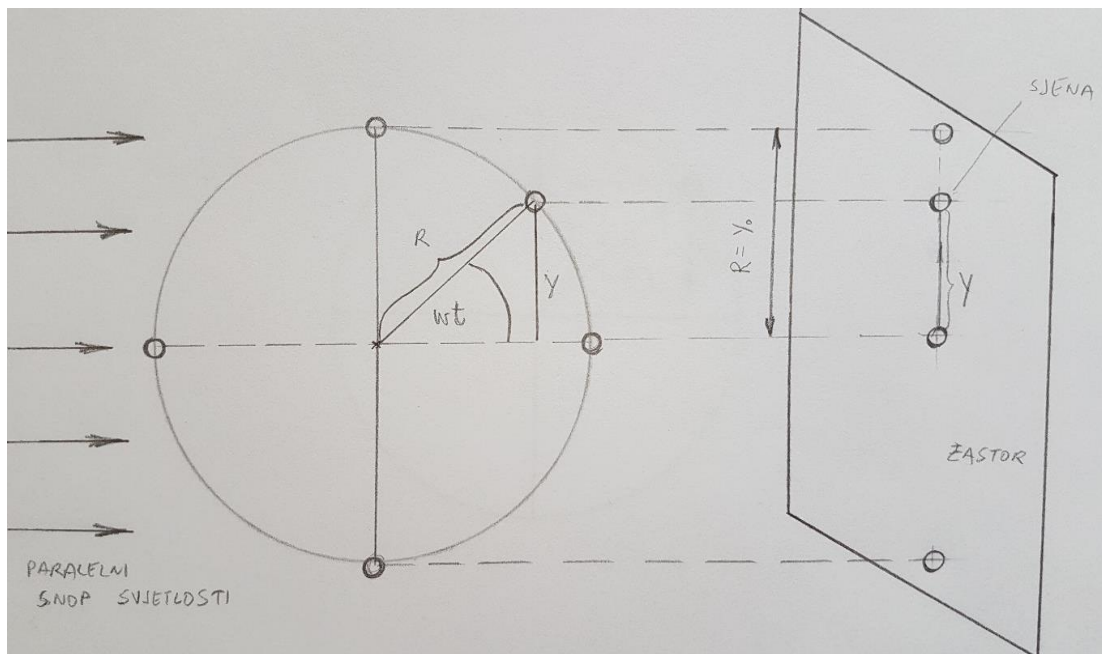
$$F = -ky. \quad (3.6)$$

Rezultantna sila koja djeluje na tijelo je proporcionalna elongaciji tj. pomaku od ravnotežnog položaja s utegom na opruzi, iz čega možemo zaključiti da tijelo (uteg) obješen na elastičnu oprugu titra harmonijski.

Harmonijski oscilator nazivamo dinamičkim sustavom jer mijenja stanje tijekom vremena. Možemo promatrati ovisnost elongacije tijela o vremenu, ovisnost brzine o vremenu, ovisnost ubrzanja o vremenu, ovisnost energije o vremenu itd. Dinamički sustavi se sastoje od tijela koja međudjeluju. Da bi opisali neki dinamički sustav potrebni su nam jednadžba gibanja tog sustava i varijable koje se mijenjaju tijekom vremena.

### 3.3. Harmonijsko titranje kao projekcija jednolikog kružnog gibanja

Jednostavno harmonijsko gibanje se može opisati pomoću ovisnosti pomaka, brzine i ubrzanja o vremenu. Zato će nam model prikazan na slici 4 biti od velike koristi pri tom opisivanju. Model se sastoji od male kuglice koja je pričvršćena za rub rotirajuće ploče i koja se kreće jednoliko po kružnici. Ploču s pričvršćenom kuglicom obasjamo paralelnim snopom svjetlosti. Na zastoru projiciramo takvo gibanje pri čemu je zastor okomit na ravninu rotirajuće ploče. Promatramo kako se sjena kuglice giba na zastoru i uočavamo da titra oko ravnotežnog položaja.



Slika 4: Model harmonijskog titranja

Kružno gibanje kuglice je jednoliko, stoga se ona giba konstantnom kružnom frekvencijom  $\omega$  (rad/s). Kut koji kuglica prijeđe (rad) ima vrijednost:

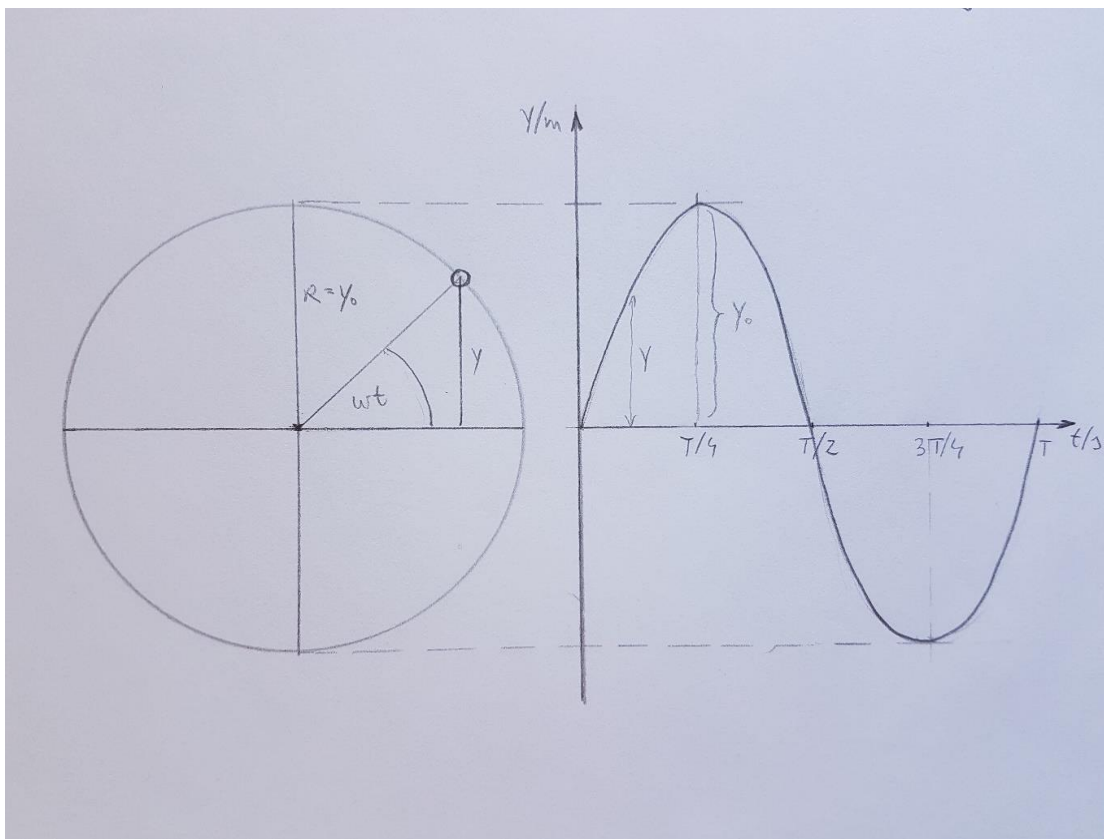
$$\theta = \omega t . \quad (3.7)$$

dok je kružna frekvencija povezana s frekvencijom titranja

$$\omega = 2\pi f . \quad (3.8)$$

### 3.4. Elongacija, brzina i ubrzanje harmonijskog oscilatora

#### Elongacija harmonijskog oscilatora



Slika 5: Ovisnost elongacije tijela o vremenu

Pomak sjene  $y$  na zastoru je projekcija radijusa kružnice  $R$  na zastor. Sa slike vidimo da je:

$$y = y_0 \sin(\omega t) \quad (3.9)$$

gdje je amplituda pomaka jednaka radijusu kružnice

$$y_0 = R.$$



Kao što vidimo, pomak od ravnotežnog položaja odnosno elongacija je sinusna funkcija vremena. Ako u trenutku  $t = 0$ , kut nije nula, onda imamo

$$y = y_0 \sin(\omega t + \theta_0) . \quad (3.10)$$

Argument sinusne funkcije, tj. kut  $(\omega t + \theta_0)$  zove se faza titranja. Faza titranja se izražava u radijanima (rad).

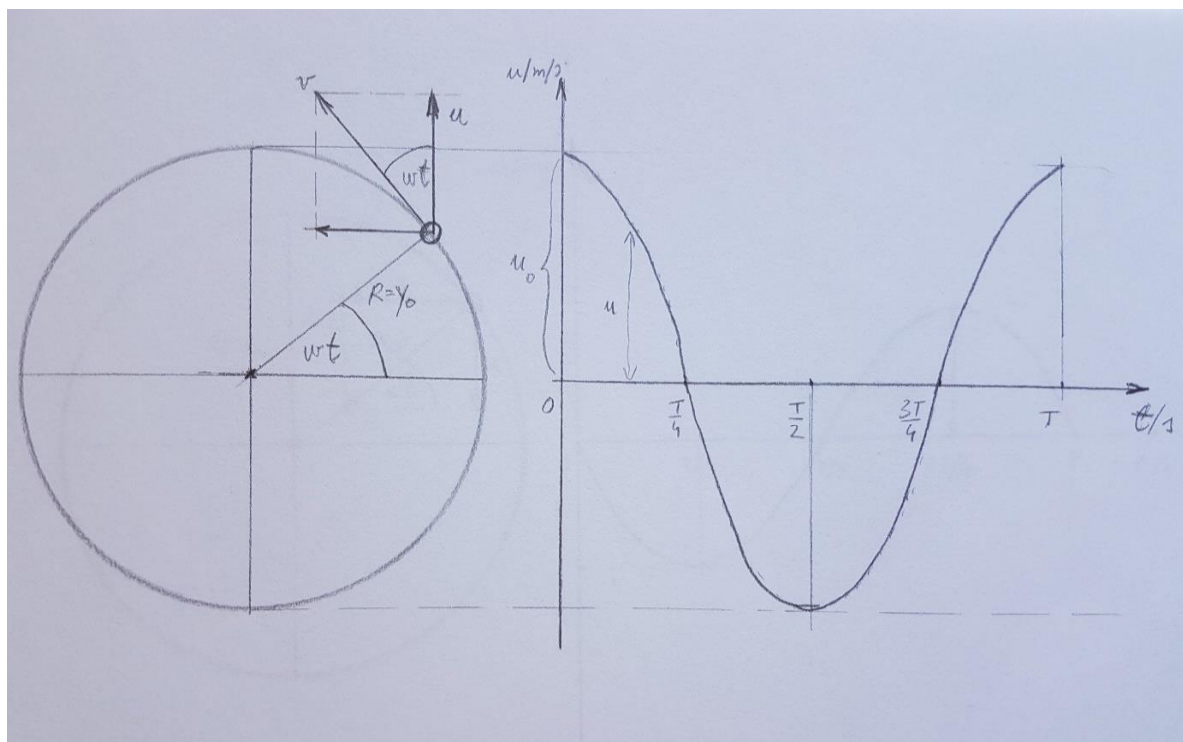
Na primjer za početni fazni kut  $\theta_0 = \pi/2$  rad relacija (3.10) glasi:

$$y = y_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) , \text{ odnosno možemo prijeći sa sin na cos}$$

$$y = y_0 \cos(\omega t) . \quad (3.11)$$

### Brzina harmonijskog oscilatora

Brzina tijela se mijenja u vremenu između maksimalne i minimalne vrijednosti. U trenutku kada sjena mijenja smjer na svakom kraju (amplitudnom položaju) oscilatornog gibanja, brzina je nula. Brzina tijela raste kada se tijelo giba prema ravnotežnom položaju, a smanjuje kad se tijelo udaljava od ravnotežnog položaja. Analiziranjem titranja sjene kuglice koja se jednoliko giba po kružnici dobivamo ovisnost brzine titranja o vremenu (slika 6).



Slika 6: Ovisnost brzine o vremenu

Brzina sjene kuglice  $u$  predstavlja projekciju brzine ravninu zastora. Brzina sjene je najveća u trenutku kada sjena kuglice prolazi ravnotežnim položajem ( $u$   $t = 0, T/2, T$ ) i tada je jednaka brzini kuglice:

$$u_0 = v = \omega R .$$

Kako je amplituda jednaka polumjeru kružnice

$$u_0 = \omega y_0 .$$

Kada se sjena nalazi najdalje od ravnotežnog položaja, tj. u amplitudnom položaju, onda je brzina jednaka nuli.

Na slici 6 vidimo da se brzina može izraziti kao:

$$u = u_0 \cos \theta , \text{ odnosno}$$

$$u = u_0 \cos (\omega t) . \quad (3.12)$$

U slučaju kada imamo neki početni fazni kut  $\theta_0$  , tada je

$$u = u_0 \cos (\omega t + \theta_0) . \quad (3.13)$$

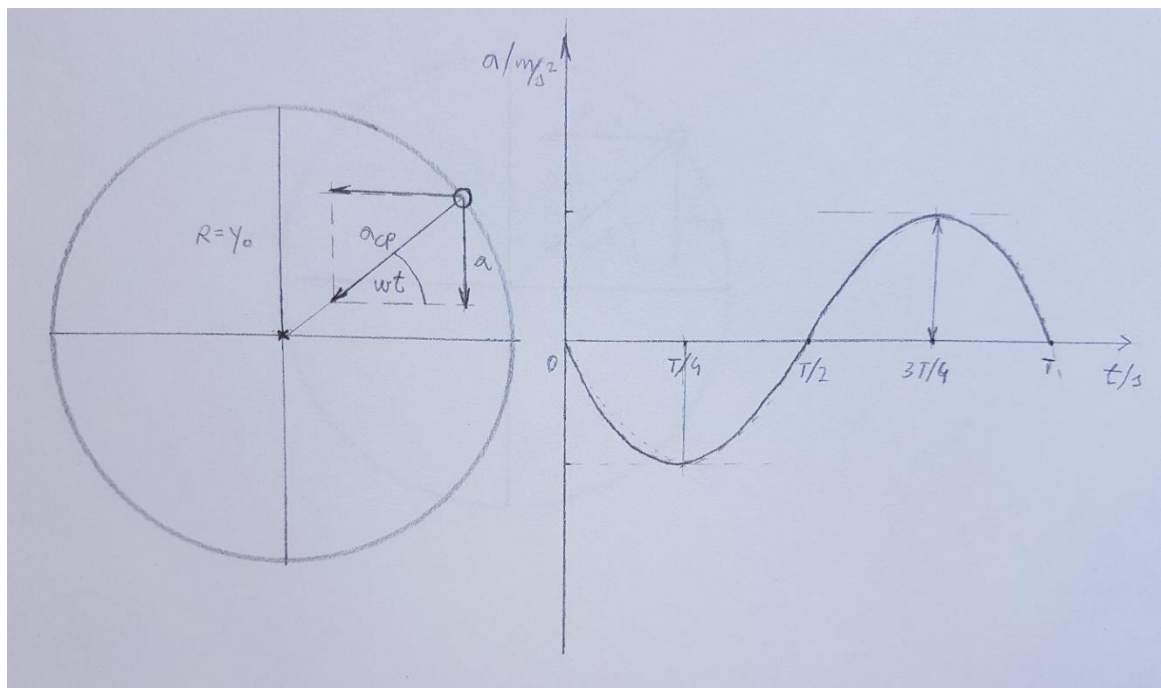
### Ubrzanje harmonijskog oscilatora

Ubrzanje sjene predstavlja projekciju vektora centripetalnog ubrzanja  $a_{cp}$  kuglice na ravninu zastora

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} ,$$

odnosno

$$a_{cp} = R \omega^2 .$$



Slika 7: Ovisnost ubrzanja u vremenu

Projekcija na zastor dana je

$$a = -a_{cp} \sin(\omega t) .$$

Ubrzanje i elongacija imaju suprotan smjer. To je zbog toga što harmonijska sila nastoji vratiti tijelo u ravnotežni položaj pa zato uvijek ima suprotan predznak od elongacije

$$a = -y_0 \omega^2 \sin(\omega t) .$$

Kada je  $\sin(\omega t) = 1$  , ubrzanje je maksimalno

$$a_0 = y_0 \omega^2 .$$

Ovisnost ubrzanja o vremenu tada glasi:

$$a = -a_0 \sin(\omega t) \tag{3.14}$$

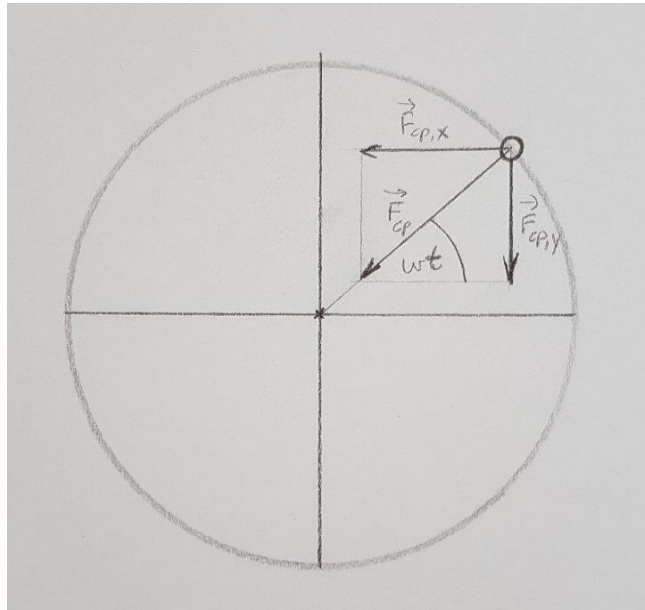
Ako u trenutku  $t = 0$  kut nije nula, tada je

$$a = -y_0 \omega^2 \sin(\omega t + \theta_0) \tag{3.15}$$

Ubrzanje je najveće u amplitudnom položaju kada se mijenja smjer brzine.

Kružno gibanje posljedica je djelovanja centripetalne sile

$$F_{cp,y} = m \frac{v^2}{R} = m \frac{4\pi^2}{T^2} R = m \omega^2 R \equiv m 4\pi^2 f^2 R .$$



Slika 8: Djelovanje centripetalne sile koja uzrokuje kružno gibanje

Sa slike 8 vidimo da je:

$$F_{cp,y} = - F_{cp} \sin \omega t .$$

Predznak minus nam govori da je sila povratna, tj. da je sila uvijek suprotnog smjera od elongacije. Koristeći 2. Newtonov zakon  $F_{cp} = m a_{cp}$ ,

$$F_{cp} = m y_0 \omega^2 ,$$

$$F_{cp,y} = - m y_0 \omega^2 \sin \omega t = - k y$$

pri čemu je konstanta opruge

$$k = m \omega^2 . \quad (3.16)$$

Time smo dobili izraz za kutnu brzinu, odnosno frekvenciju harmonijskog oscilatora

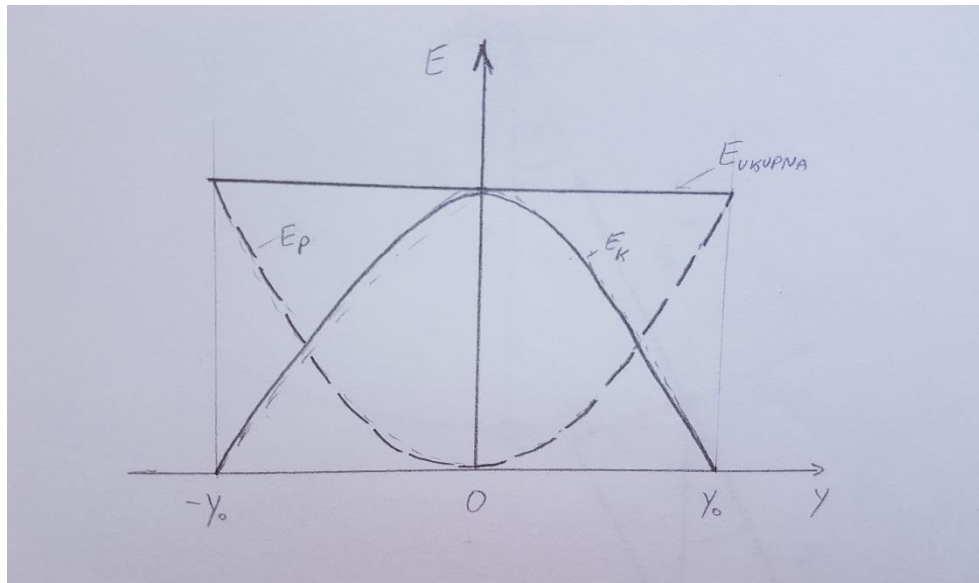
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} . \quad (3.17)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} . \quad (3.18)$$

Ono što uočavamo je da period (odnosno frekvencija) ovisi samo o svojstvima oscilatora, a ne ovisi o početnim uvjetima (načinu na koji smo oscilator zatitrali).

### 3.5. Energija harmonijskog oscilatora

Ukupna energija harmonijskog oscilatora sastoji se od kinetičke i potencijalne energije.



Slika 9: Ovisnost kinetičke i potencijalne energije o elongaciji

Za vrijeme titranja kinetička i potencijalna energija se međusobno izmjenjuju, a ukupna energija sukladno zakonu o očuvanju energije ostaje očuvana.

Kinetička energija definirana je masom i brzinom

$$E_k = \frac{mv^2}{2},$$

Elastična potencijalna energija dana je s

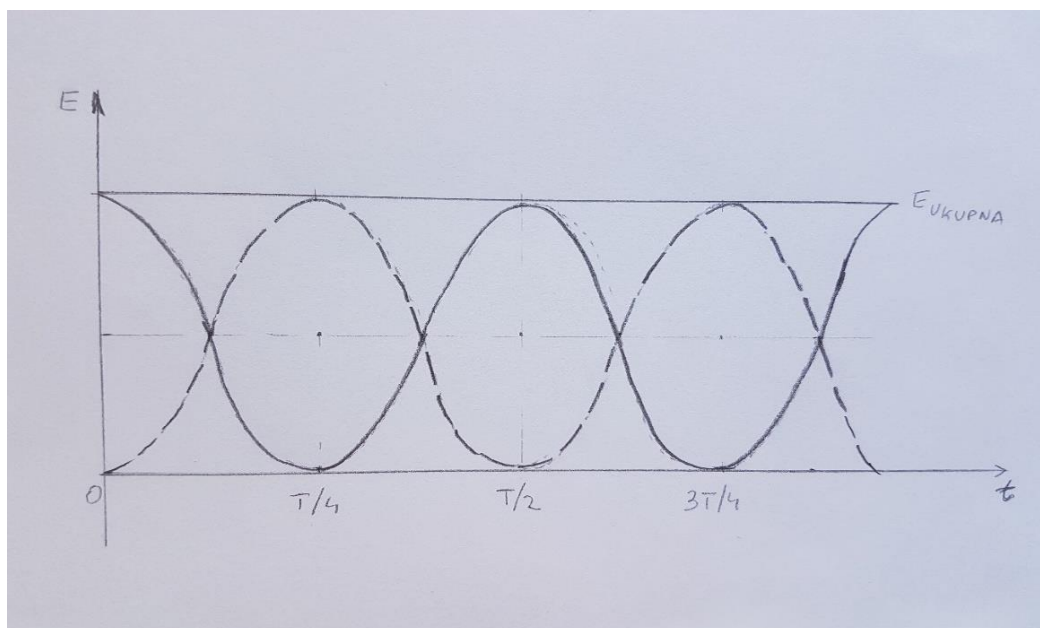
$$E_{ep} = \frac{ky^2}{2}.$$

U trenutku kad se tijelo nalazi najdalje od ravnotežnog položaja, tj. u amplitudnom položaju, tada je elastična potencijalna energija maksimalna i jednaka je:

$$E_{ep} = \frac{ky_0^2}{2},$$

gdje je  $y_0$  amplituda, tj. najveća udaljenost od ravnotežnog položaja.

Na slici 10 prikazana je pretvorba energije u vremenu pri harmonijskom titranju.



Slika 10: Ovisnost energije o vremenu

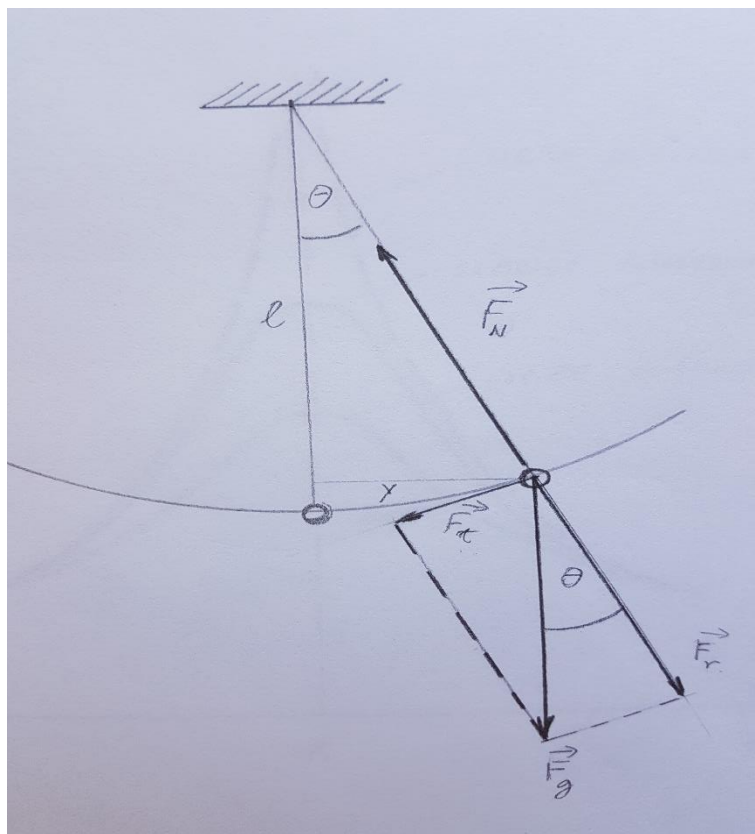
Zbroj energija se ne mijenja kada u njima ne bi bilo nikakvih drugih oblika energija osim mehaničke energije. Ukupna energija je konstantna:

$$E_k + E_{ep} = \text{konst.}$$

U ovom razmatranju nismo razmatrali gravitacijsku potencijalnu energiju, jer gibanje promatramo u odnosu na ravnotežni položaj u kome se sila teža izjednačila s elastičnom silom.

### 3.6. Matematičko njihalo

Malu masu  $m$  koju možemo aproksimirati materijalnom točkom, obješenu pomoću nerastezljive niti zanemarive mase duljine  $l$  na objesište nazivamo matematičkim ili jednostavnim njihalom. Kada pomaknemo kuglicu iz ravnotežnog položaja i pustimo je iz mirovanja, ona počne titrati oko ravnotežnog položaja. Kinetička energija kuglice se povećava kako se kuglica približava ravnotežnom položaju, a potencijalna energija se smanjuje. Kad kuglica ide od ravnotežnog prema amplitudnom položaju kinetička energija se smanjuje, a potencijalna energija raste. Na kuglicu djeluje sila teža  $F_g$  koja je usmjerena vertikalno prema dolje i sila napetosti niti  $F_N$  koja djeluje prema objesištu.



Slika 11: Matematičko njihalo (dijagram sila)

Silu težu rastavimo na tangencijalnu komponentu  $F_t$  i radijalnu komponentu  $F_r$ . Tangencijalna komponenta sile teže je ona koja je uzrok gibanja i ona je jednaka:

$$F_t = - m g \sin\theta . \quad (3.19)$$

Negativan predznak znači da je riječ o povratnoj sili, ona djeluje u suprotnom smjeru od kutnog pomaka.

Udaljenost od ravnotežnog položaja (luk) možemo označiti s  $y$  i ona je jednaka:

$$y = l \theta \quad (3.20)$$

Titranje jednostavnog njihala nije pravo harmonijsko titranje, ali možemo uvesti aproksimaciju za male kutove  $\theta$  pri čemu luk zamjenjujemo dužinom.

Za male kutove  $\theta$  vrijedi:

$$\sin \theta \approx \theta . \quad (3.21)$$

Sada možemo jednadžbu (3.19) koja uzrokuje gibanje napisati kao:

$$F_t = -m g \theta . \quad (3.22)$$

Umjesto vrijednosti kuta uvrstimo  $\theta = y/l$  i dobijemo:

$$F_t = -\frac{m g}{l} y ,$$

gdje je konstanta proporcionalnosti jednaka:

$$k = \frac{m g}{l} . \quad (3.23)$$

Kada uvrstimo konstantu  $k$  iz relacije (3.23) u formulu za period harmonijskog titranja koji je definiran kao  $T = 2\pi \sqrt{m/k}$ , dobijemo period matematičkog njihala koji je jednak:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} . \quad (3.24)$$

Važno je uočiti da period njihala ne ovisi o masi. Vidimo da period titranja jednostavnog njihala ovisi isključivo o duljini njihala i ubrzanju sile teže.

### 3.7. Prigušeno titranje harmonijskog oscilatora

Dosad smo razmatrali titranja u kojima je energija očuvana. Realna titranja su prigušena pri čemu energija nije očuvana.

Uzmimo za primjer titranje utega obješenog na elastičnu oprugu. Vidimo da se amplituda titranja smanjuje i nakon nekog vremena se uteg zaustavi. Kod slobodnih neprigušenih oscilacija, amplituda je bila stalna dok kod prigušenih titranja monotono opada s vremenom.

Sila trenja je ta koja djeluje na tijelo koje se giba i njen smjer je suprotan od brzine gibanja tijela

$$F_o = -b v , \quad (3.25)$$

pri čemu je  $b$  koeficijent trenja. Drugi Newtonov zakon daje

$$ma = -bv - ky . \quad (3.26)$$

Rješenje te jednadžbe glasi:

$$y = y_0 e^{-\frac{b}{2m}t} \sin(\omega t + \theta) . \quad (3.27)$$

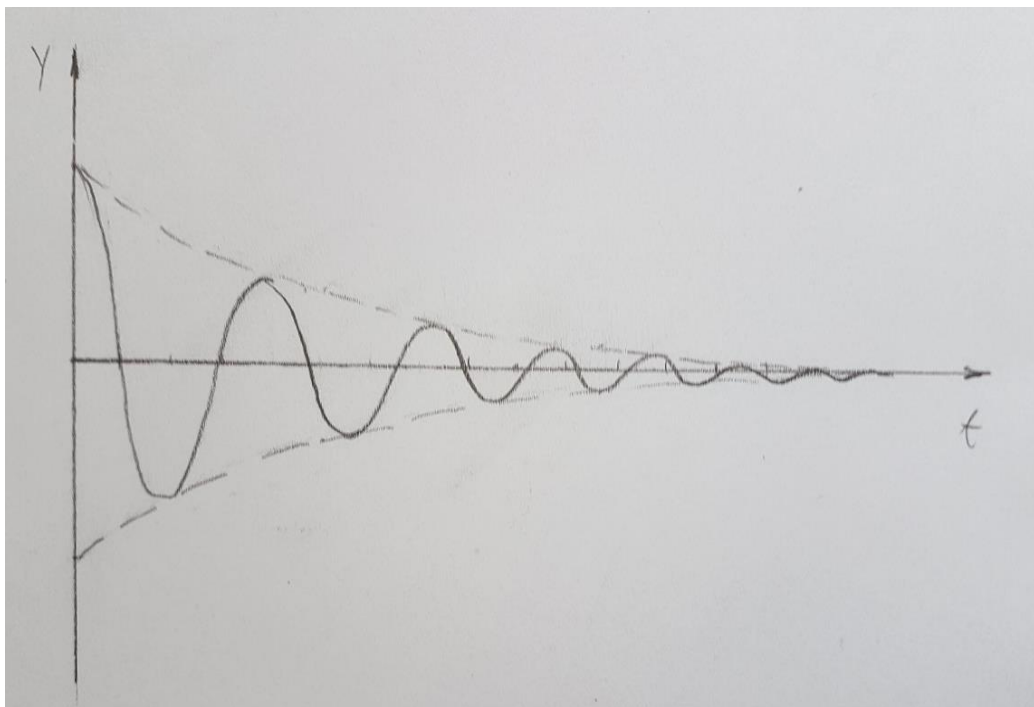


Iz toga vidimo da se amplituda titranja smanjuje eksponencijalno tijekom vremena.

Gušenje može biti jako ili slabo. Kada je gušenje slabo, amplituda se sporije smanjuje i možemo primijetiti kako je omjer susjednih amplituda praktički stalan broj. Taj omjer zovemo faktor slabljenja

$$\delta = \frac{A_n}{A_{n+1}},$$

gdje  $n = 1, 2, 3, \dots$  predstavlja broj amplitude. On je uvijek veći od 1. Amplitude kod slabog gušenja postupno postaju sve manje i manje, dok se kod jakog gušenja amplituda puno brže smanjuje.



Slika 12: Prigušeno titranje

Za svaki harmonijski oscilator vlastito titrajno vrijeme i vlastita frekvencija su dani sljedećim izrazima:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3.28)$$

Značajnu ulogu igra kritično gušenje. Na primjer kod amortizera automobila je važno da se u najkraćem vremenu vrati u ravnotežni položaj.

### 3.8. Prisilno titranje harmonijskog oscilatora

Ako na oscilator djeluje neka vanjska periodična sila, tada njegovo titranje nazivamo prisilnim titranjem. Pretpostavimo da je vanjska periodična sila sinusnog oblika:

$$F = F_0 \sin(\omega t), \quad (3.29)$$

gdje je  $F_0$  amplituda vanjske periodične sile.

Prema drugom Newtonovom zakonu jednadžba takvog oscilatora je:

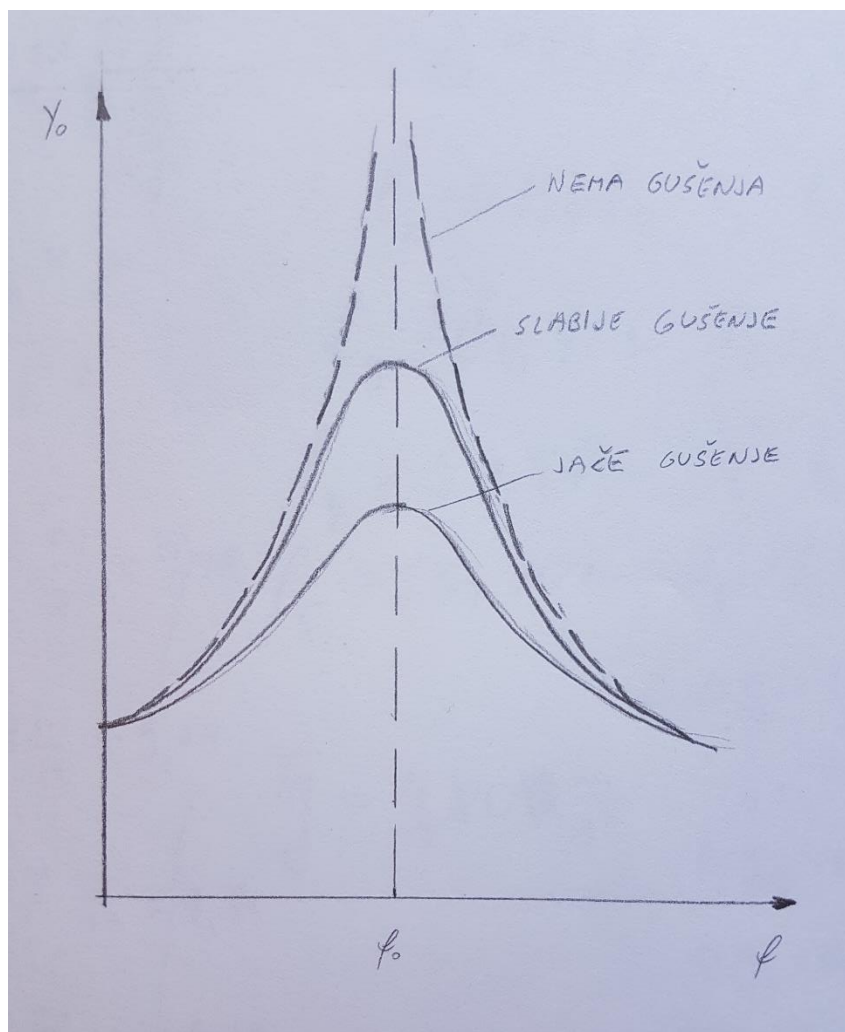
$$F_0 \sin(\omega t) - ky - bv = ma. \quad (3.30)$$

Rješenje te jednadžbe je:

$$y = y_0 \sin(\omega t - \theta), \quad (3.31)$$

gdje su  $y_0$  i  $\theta$  konstante.

Amplituda prisilnog titranja ovisi o odnosu prisilne frekvencije  $f$  i vlastite frekvencije  $f_0$ . Što je prisilna frekvencija  $f$  bliža vlastitoj frekvenciji  $f_0$ , tada je prijenos energije od vanjske sile na oscilator bolji i djelotvorniji. Prijenos energije je najveći kad se prisilna i vlastita frekvencija izjednače. Pojava pri kojoj energija titranja maksimalno prelazi s jednog sustava na drugi se naziva rezonancija. Jačina rezonancije ovisi o prigušenju. Što je veće prigušenje, to je rezonancija manja.



Slika 13: Ovisnost amplitude o frekvenciji titranja kod prisilnog titranja

Na slici 13 je prikazana ovisnost amplitude prisilnog titranja o omjeru  $f / f_0$ . Vidimo da su krivulje zvonolikog oblika. Oblik krivulje ovisi o prigušenju. Što je prigušenje slabije, to je amplituda prisilnog titranja veća.

## 4. Demonstracijski pokusi vezani za harmonijski oscilator

### 4.1. Slobodno (neprigušeno) titranje

**Pokus 1:** Snimanje titranja utega na elastičnoj opruzi uz pomoć pametnog telefona i aplikacije *Motion Shot*.

**Pribor:** Elastična opruga, uteg, improvizirani stalak, ljepljive trakice u boji, bijela vrata kao pozadina, pametni telefon Samsung Galaxy S7.

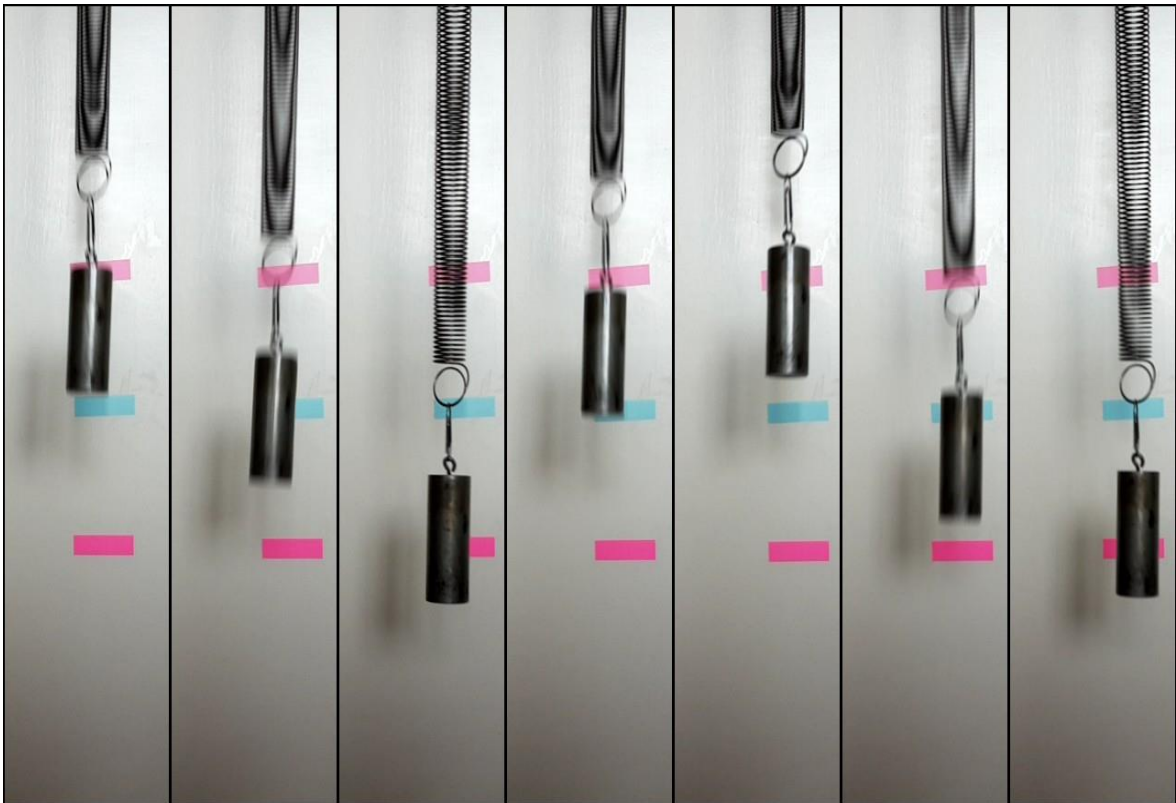
**Opis pokusa:** Objesimo uteg na elastičnu oprugu. Plavom ljepljivom trakicom označimo ravnotežni položaj utega, a rozim trakicama amplitudne položaje. Na pametni telefon instalirajte aplikaciju Motion Shot koju možete skinuti s interneta (referenca 8).



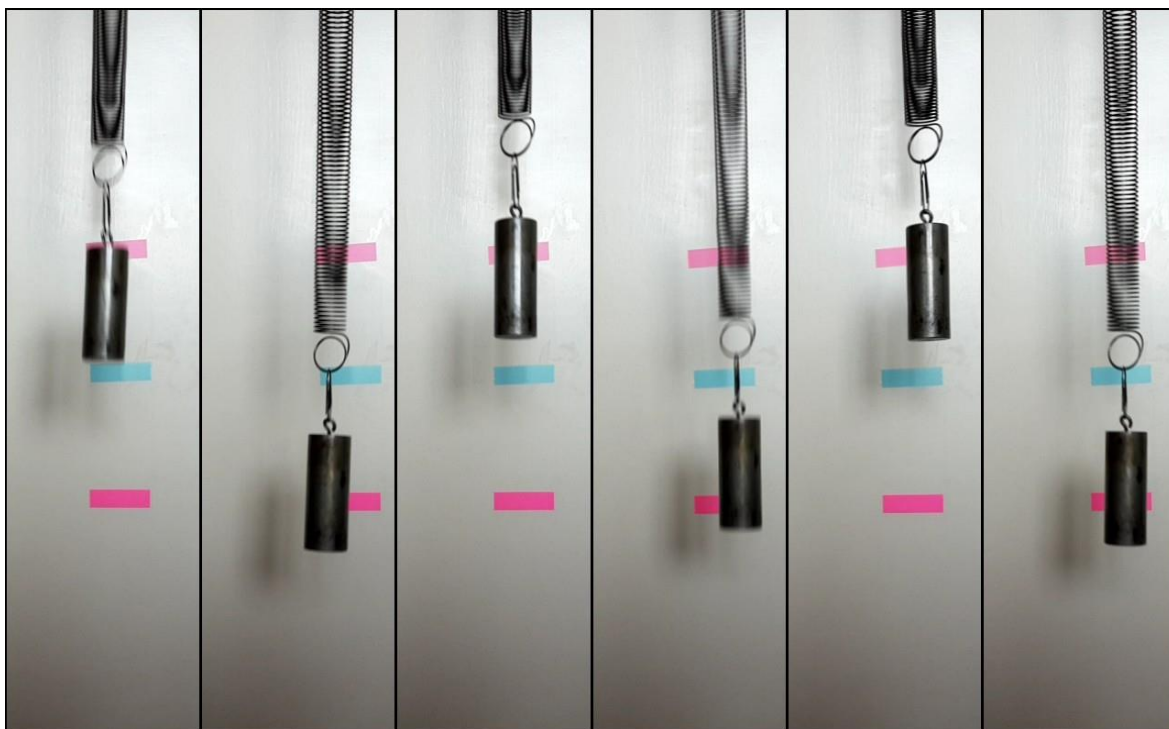
Slika 14: Eksperimentalni postav

Pozicionirajte se na udaljenosti od 1m od utega i držite mobitel u ravnini ravnotežnog položaja utega. Pokrenite aplikaciju *Motion Shot* i dotaknite fokus svog promatranja (u našem slučaju je to uteg) na ekranu mobitela. Nakon toga izvucite uteg iz ravnotežnog položaja i pustite da titra te pritisnite gumb za snimanje.

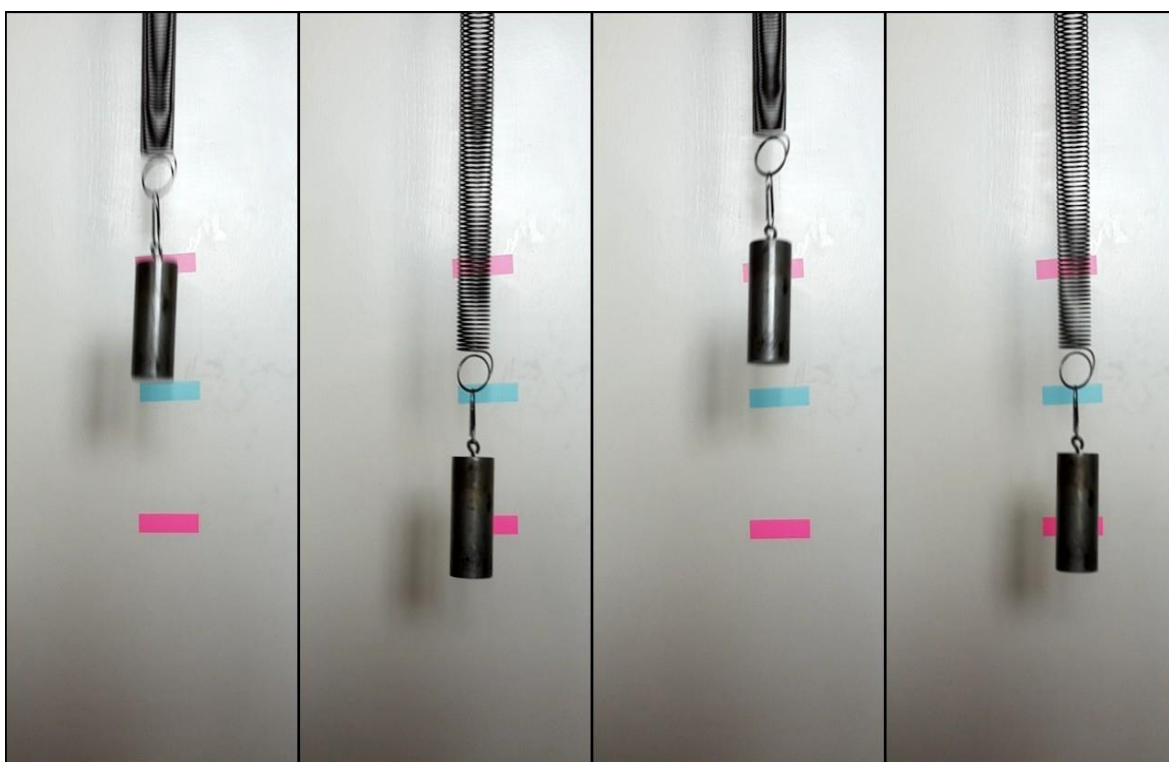
Ova aplikacija omogućuje snimanje kratkog videozapisa automatskim prikazivanjem kretanja u jednu fotografiju tako da izgleda kao kontinuirana slika. Možemo namjestiti broj dijelova animacije kako bi dobili zapis titranja kakav želimo.



Slika 15: Kontinuirana slika dobivena pomoću aplikacije Motion Shot ( 7 dijelova animacije )



Slika 16: Kontinuirana slika dobivena pomoću aplikacije Motion Shot ( 6 dijelova animacije )



Slika 17: Kontinuirana slika dobivena pomoću aplikacije Motion Shot ( 4 dijela animacije )

### **Pitanja za razmišljanje:**

U zagradama pored pitanja će biti očekivani učenički odgovori.

-Što ste opazili na slikama? (Bitno je da uoče da je to sinusoidalno gibanje)

-Koje sile djeluju na tijelo kad se ono nalazi u ravnotežnom položaju? (Sila teža i elastična sila)

-U kojem smjeru djeluju sile na tijelo kad se ono nalazi u ravnotežnom položaju? (Sila teža prema dolje, a elastična sila prema gore.)

-Zbog čega se tijelo giba kad ga izvučemo iz ravnotežnog položaja i onda pustimo? (Zbog djelovanja elastične sile koja ga vraća natrag prema ravnotežnom položaju.)

-Kako bi opisali gibanje tijela između dva amplitudna položaja?

-Kolika je rezultantna sila na tijelo u ravnotežnom položaju? (Nula)

-Zbog čega se onda tijelo giba i nakon prolaska kroz ravnotežni položaj? (Zbog inercije/jer ima brzinu, odnosno kinetičku energiju).

-Koliko je ubrzanje tijela kad se ono nalazi u ravnotežnom položaju, a koliko kad se nalazi u amplitudnom položaju?

**Upotreba pokusa u nastavi:** Ovaj pokus se izvodi u trećem razredu gimnazije. Izvedeni pokus je frontalno opservacijski pokus. Njime pokazujemo sinusoidalnu ovisnost elongacije utega u ovisnosti o vremenu. Pri snimanju titranja bitno je mirno držati mobitel kako bi se uhvatio fokus promatranja i kako bi snimljene animacije izgledale preglednije. Treba pripaziti da se uteg lagano izvuče iz ravnotežnog položaja gore ili dolje i pusti kako bi što pravilnije titrao bez zanošenja u stranu. Pokus se može izvesti i snimiti na satu, ali i kod kuće kao dio projektne nastave. Umjesto elastične opruge može se koristiti i gumena elastična traka.



**Pokus 2:** Snimanje titranja utega na elastičnoj opruzi uz pomoć pametnog telefona i aplikacije *Phyphox*.

**Pribor:** Elastična opruga, uteg, stalak, prozirna vrećica, spajalica za papir, savitljiva bakrena žica, pametni telefon Samsung Galaxy S3, bijela dekica kao pozadina.

**Opis pokusa:** Objesimo elastičnu oprugu na stalak i na nju “prikopčamo” prozirnu vrećicu u koju stavimo mobitel. Prethodno instaliramo aplikaciju *Phyphox* koju skinemo s Google play-a. Pomoću spajalice za papir i tanke savitljive bakrene žice “spojimo” prozirnu vrećicu s utegom, uđemo u aplikaciju phyphox i odaberemo *Acceleration (without g)*. U opcijama u gornjem desnom kutu (zadnji znak u kutu) možemo odabrati koliko dugo će trajati pokus i s kolikom vremenskom odgodom od trenutka kada stisnemo znak za start.



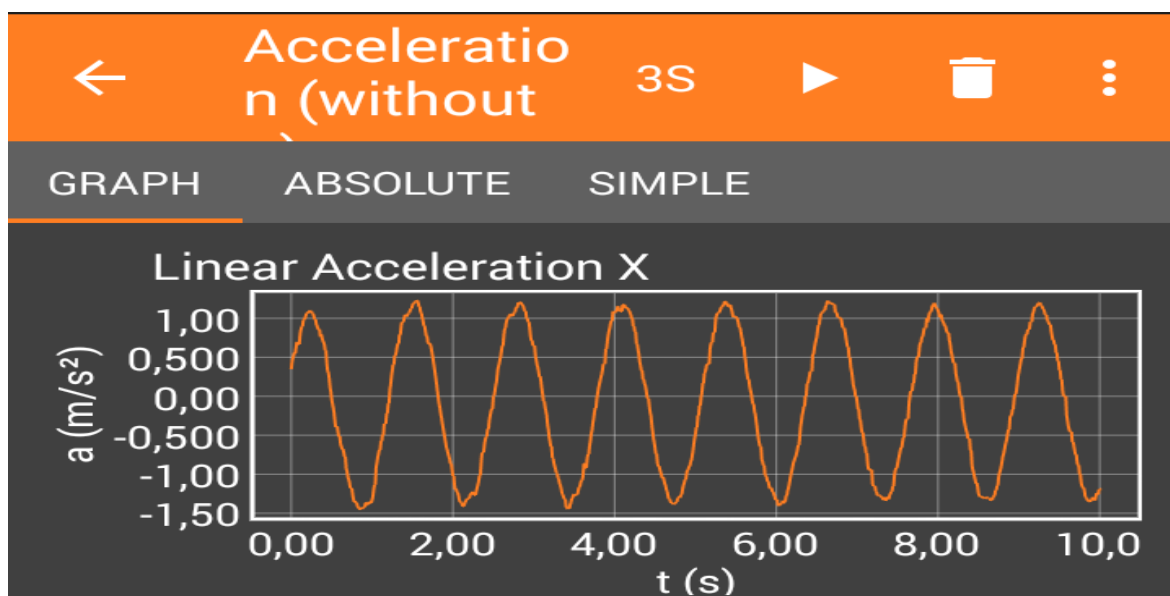
Slika 18: Eksperimentalni postav



Aplikacija *Phyphox* vam daje pristup senzorima vašeg telefona izravno ili putem eksperimenata spremnih za reprodukciju koji analiziraju vaše podatke i omogućuju izvoz sirovih podataka zajedno s rezultatima za daljnju analizu.



Slika 19: Ekran mobitela pokazuje slobodno titranje utega u intervalu od 10s.

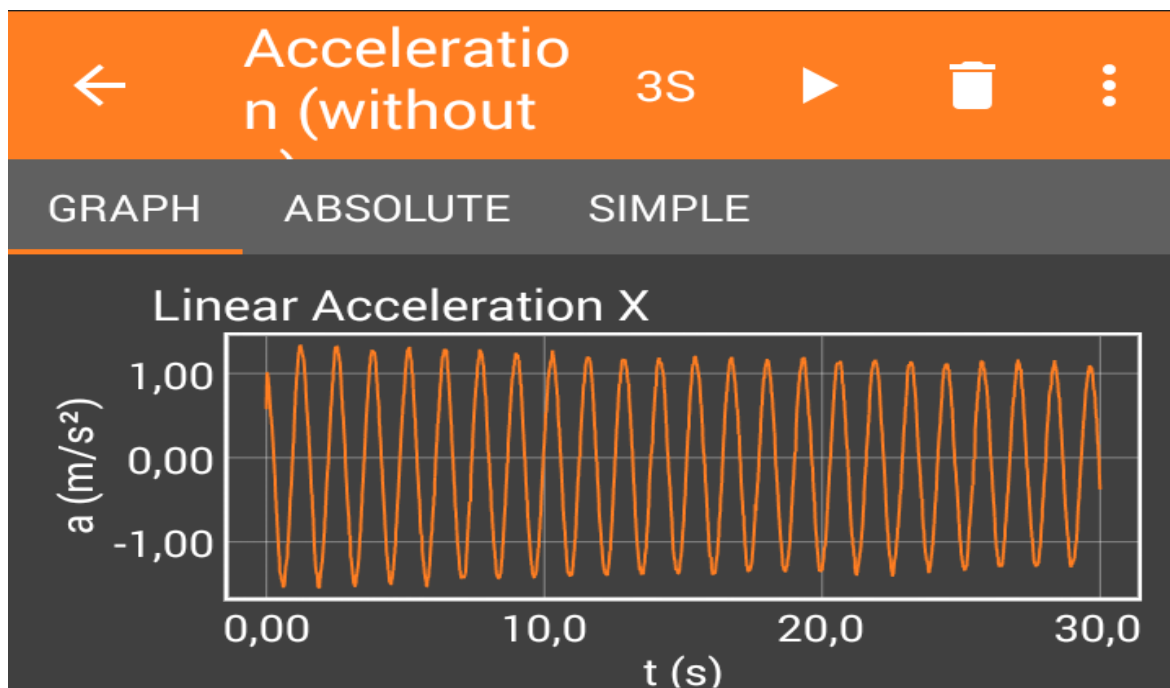


Slika 20: Uvećani prikaz amplituda slobodnog titranja utega u intervalu od 10s.

Uteg izvučemo iz ravnotežnog položaja i pustimo. Zajedno s utegom titra sustav zajedno s prozirnom vrećicom u kojoj je mobitel. Amplitude koje promatramo na ekranu mobitela su narančaste boje. Na ekranu mobitela vidimo amplitude koje su približno konstantnog iznosa što je i logično budući da sustav slobodno titra. Tek nakon duljeg vremena (u našem slučaju to je nekoliko minuta) se primijeti kako se amplitude polako počinju smanjivati. To je zbog toga što su sva realna titranja prigušena. Međutim, nas zanima kraći interval titranja do 1 minute kada su amplitude približno konstantnog iznosa i kad takvo titranje možemo aproksimirati kao neprigušeno titranje.



Slika 21: Ekran mobitela pokazuje slobodno titranje utega u intervalu od 30s.



Slika 22: Prikaz konstantnih amplituda slobodnog titranja utega u intervalu od 30s.

### Pitanja za razmišljanje:

-Prije pokusa: Kakav graf očekujete da ćete dobiti?

-Kako bi opisali narančastu krivulju koju vidite na ekranu mobitela? (Učenici prepoznaju sinusoidu.)

-Koje kvantitativne podatke mogu dobiti iz ovog pokusa? Na koji način ih mogu dobiti?

(Period i frekvenciju; Period dobijemo tako da vrijeme proteklo od prvog do zadnjeg titraja podijelimo s brojem titraja; Što ima više titraja, mjerenje perioda je preciznije)

-Na koji način uteg titra? Kako bi nazvali takvo titranje? (Gore-dolje oko ravnotežnog položaja; to je harmonijsko titranje)

**Upotreba pokusa u nastavi:** Prikazani pokus se može izvesti u sklopu nastavne jedinice u kojoj govorimo o jednadžbi harmonijskog oscilatora i izgledu grafa elongacije harmonijskog titranja. Za izvedbu pokusa je veoma važno pričvrstiti mobitel (koji pokazuje titranje na ekranu) na elastičnu oprugu na način da ne ometa pravilno (okomito) titranje utega. Ovaj pokus se može demonstrirati pred cijelim razredom, ali trebalo bi pozvati učenike bliže mjestu izvođenja pokusa kako bi svi dobro vidjeli rezultate pokusa na ekranu mobitela. Ili se može projicirati na zid ili neko platno pomoću projektora da svi vide to uvećano.

## 4.2. Titranje jednostavnog njihala

**Pokus:** Zapis titranja jednostavnog njihala

**Pribor:** Improvizirani stalak (metla priklještena između dvije stolice i drveni štap zavezan gumicama za metlu), lijevak, dvije niti konca zalijepljene za drveni štap s jedne strane i za lijevak s druge strane, šećer, obojeni hamer papir, pravokutni komad tankog kartona

**Opis pokusa:** Kako bi snimili izgled titranja jednostavnog njihala, možemo koristiti uređaj prikazan na slici. Uzmite šećer i jednom rukom sipajte šećer u lijevak, a drugom rukom držite prst na užem otvoru lijevka kako ne bi istjecao. Lagano zanjišite lijevak na način da ga izvučete iz ravnotežnog položaja, maknete prst s lijevka i pustite ga da se njiše tamo-amo oko ravnotežnog položaja. Za to vrijeme druga osoba treba povlačiti obojeni papir ispod lijevka kako biste snimili titranje.



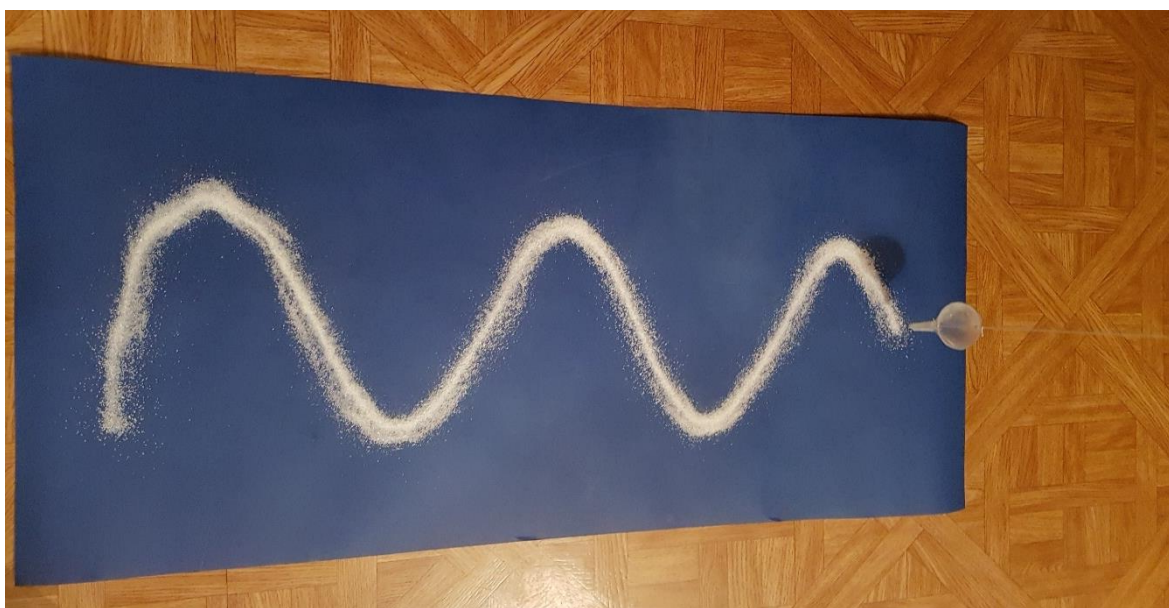
Slika 23: Eksperimentalni postav.



Ovaj pokus je poželjno raditi u parovima po dvoje jer jedna osoba ne može sve sama napraviti. Dok jedna osoba drži prst na otvoru lijevka i pušta lijevak da počne titrati, druga osoba spremno čeka početak titranja kako bi krenula povlačiti obojeni papir ispod lijevka. Šećer istječe kroz uži otvor lijevka i ostavlja trag na obojenom papiru.



Slika 24: Prikaz grafa neprigušenog harmonijskog titranja.



Slika 25: Uvećani prikaz grafa neprigušenog harmonijskog titranja.

Sad ćemo pričvrstiti pravokutni komad tankog kartona za niti njihala. Eksperimentalni postav je prikazan na slici 26. Opet ćemo zanjihati lijevak sa šećerom i istovremeno povlačiti obojeni papir ispod njega. Vidimo da se amplituda titranja smanjuje s vremenom.



Slika 26: Prikaz grafa prigušenog harmonijskog titranja.

### Pitanja za razmišljanje:

- Kakvu krivulju očekujete? Slaže li se vaša očekivanja s rezultatima pokusa?
- Kako treba povlačiti papir ispod lijevka da snimimo titranje? (Jednoliko pravocrtno)
- Da li njihalo titra harmonijski? Kako to znate?
- Što mislite, kako će titrati njihalo kad pričvrstite tanki karton za niti njihala?
- Što se može kvantitativno odrediti iz pokusa? (Možemo odrediti period odnosno frekvenciju. Treba vam samo štoperica da se zna koliko je vremena proteklo od prvog do zadnjeg titraja. )

-Koje sile djeluju na tijelo kad se ono nalazi otklonjeno iz ravnotežnog položaja? Koji su smjerovi tih sila? (Djeluje sila teža i sila napetosti niti; smjer sile teže je okomito prema dolje, a smjer sile napetosti niti je u smjeru ovjesišta).

-Osmislite slične pokuse kojima bi demonstrirali prikaz zapisa titranja jednostavnog njihala.

**Upotreba pokusa u nastavi:** Ovaj pokus je zamišljen kao grupni učenički pokus. Učenici bi ovaj pokus radili u grupama po dvoje. Izvedeni pokus je verifikacijski pokus kojim želimo dokazati da je graf elongacije harmonijskog titranja sinusoidalnog oblika. Mi smo u pokusu koristili šećer, ali može se također koristiti pijesak, sol ili pšenična krupica. Kod lijepljenja kartona sa nitima njihala treba pripaziti da budu zalijepljene na jednakim mjestima (na istim mjestima s obje strane i paralelno s objesištem ) da bi njihanje bilo harmonijsko. Nakon izvođenja pokusa prigušenog titranja pomoću zalijepljenog kartona može se provjeriti vrijedi li za to njihalo da je omjer susjednih amplituda konstantan.

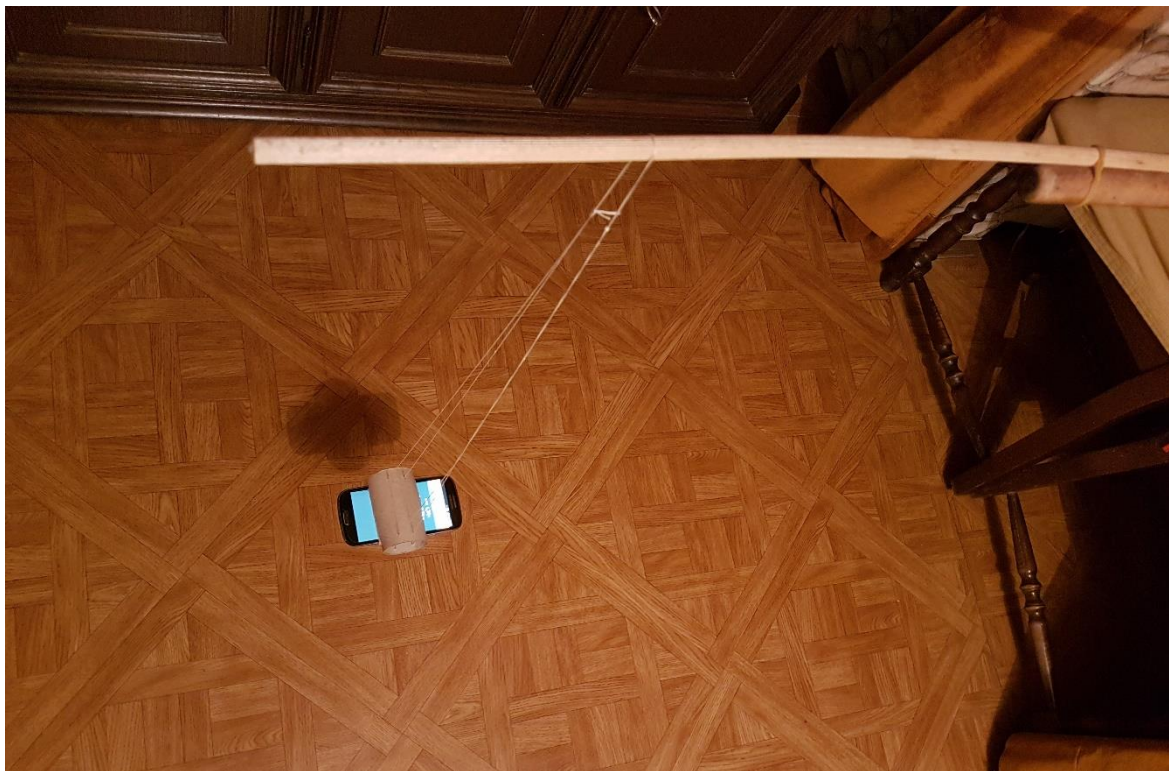


### 4.3. Primjena njihala

**Pokus:** Ljuljačka za određivanje ubrzanja sile teže  $g$

**Pribor:** Kartonski valjak oko kojeg se zamotava wc papir, konac, škare, igla, stalak, pametni telefon Samsung Galaxy S3.

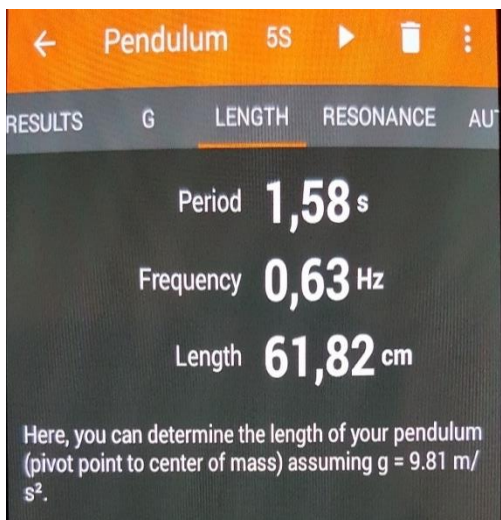
**Opis pokusa:** S gornje i donje strane valjka izbušimo po četiri rupice kroz koje provučemo niti njihala. S lijeve i desne strane izrežemo širinu koja nam je potrebna da bi ugurali pametni telefon. Uđemo u mobilnu aplikaciju phyphox i nađemo odjeljak *Mechanics* i tu odaberemo *Pendulum*. Unutar odabranog izbornika *Pendulum* izaberemo LENGTH. Kliknemo znak za start i zanjishemo valjak sa mobitelom.



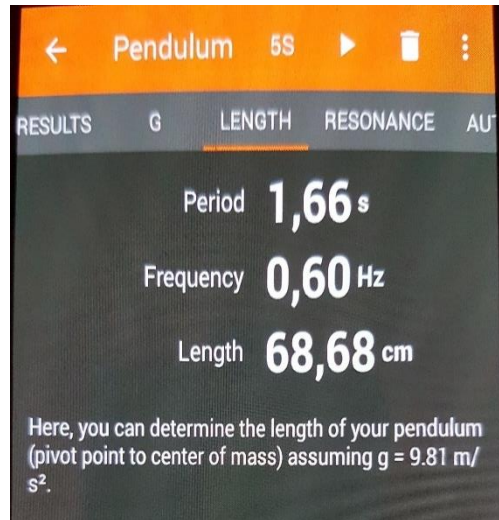
Slika 27: Eksperimentalni postav

Kako se valjak sa mobitelom njiše, tako aplikacija mjeri duljinu niti njihala, period i frekvenciju titranja. Budući da mi želimo izračunati ubrzanje sile teže  $g$ , potrebni su nam period titranja i duljina njihala.

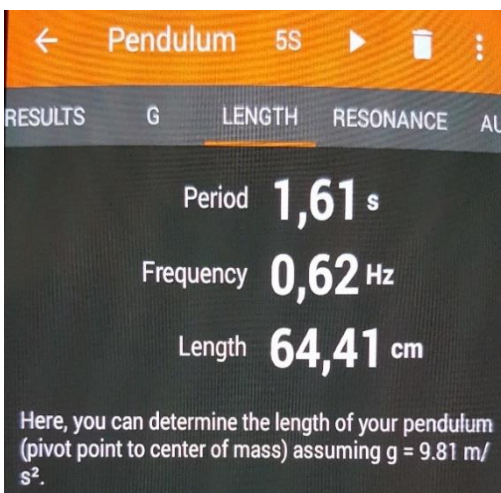




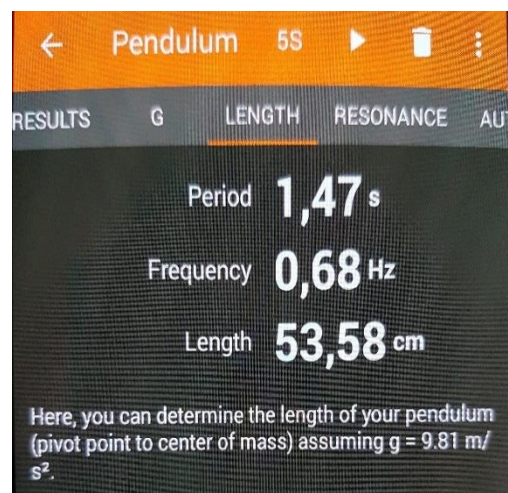
Slika 28: Prvo mjerenje perioda i duljine njihala



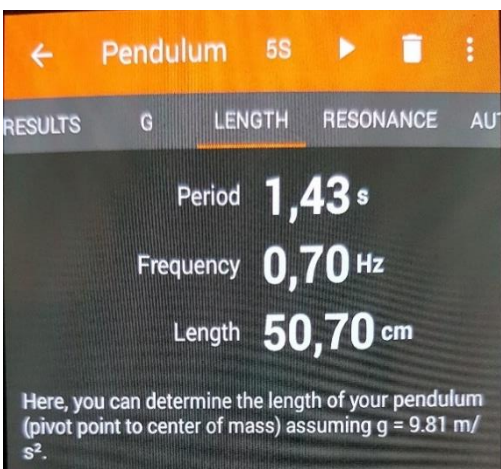
Slika 29: Drugo mjerenje perioda i duljine njihala



Slika 30: Treće mjerenje perioda i duljine njihala



Slika 31: Četvrto mjerenje perioda i duljine njihala



Slika 32: Peto mjerenje perioda i duljine njihala

Rezultati mjerenja:

$$l_1 = 61,82 \text{ cm} ; T_1 = 1,58 \text{ s} ; f_1 = 0,63 \text{ Hz}$$

$$l_2 = 68,68 \text{ cm} ; T_2 = 1,66 \text{ s} ; f_2 = 0,60 \text{ Hz}$$

$$l_3 = 64,41 \text{ cm} ; T_3 = 1,61 \text{ s} ; f_3 = 0,62 \text{ Hz}$$

$$l_4 = 53,58 \text{ cm} ; T_4 = 1,47 \text{ s} ; f_4 = 0,68 \text{ Hz}$$

$$l_5 = 50,70 \text{ cm} ; T_5 = 1,43 \text{ s} ; f_5 = 0,70 \text{ Hz}$$

$$\text{Period matematičkog njihala je } T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} .$$

Uvrštavanjem u izraz za ubrzanje sile teže  $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$  imamo

$$g_1 = 9,78 \text{ m/s}^2 ;$$

$$g_2 = 9,84 \text{ m/s}^2 ;$$

$$g_3 = 9,81 \text{ m/s}^2 ;$$

$$g_4 = 9,79 \text{ m/s}^2 ;$$

$$g_5 = 9,79 \text{ m/s}^2 .$$

Srednja vrijednost je aritmetička sredina izmjerenih vrijednosti

$$\bar{g} = \frac{g_1 + g_2 + g_3 + \dots + g_n}{n} = 9,80 \text{ m/s}^2 .$$

Odstupanje pojedinog mjerenja od vrijednosti  $\bar{g}$  zovemo apsolutnom pogreškom.

Označavamo je kao  $\Delta g$

$$\bar{g} - g_n = \Delta g_n .$$

Dobivamo sljedeće rezultate:

$$\Delta g_1 = -0,02 \text{ m/s}^2$$

$$\Delta g_2 = 0,04 \text{ m/s}^2$$

$$\Delta g_3 = 0,01 \text{ m/s}^2$$

$$\Delta g_4 = -0,01 \text{ m/s}^2$$

$$\Delta g_5 = -0,01 \text{ m/s}^2 .$$

Apsolutnu vrijednost najvećeg odstupanja  $\Delta g$  od srednje vrijednosti  $\bar{g}$  nazivamo maksimalno apsolutnom pogreškom i označavamo  $\Delta g_{max}$ . Maksimalna apsolutna pogreška iznosi 0,04 m/s<sup>2</sup>.

Rezultat zapisujemo kao:  $g = ( \bar{g} \pm \Delta g_{max} )$ .

Konačni rezultat je:  $g = (9,80 \pm 0,04) \text{ m/s}^2$ . Dobili smo izvrstan rezultat ako imamo na umu da je ubrzanje sile teže kod nas jednaka 9,81 m/s<sup>2</sup>.

Ako želimo procijeniti koliko je neki rezultat mjerenja točan tada računamo relativnu pogrešku

$$R = \frac{\Delta g_{max}}{\bar{g}} = \left( \frac{\Delta g_{max}}{\bar{g}} \cdot 100 \right) \% .$$

U našem slučaju je  $R = 0,41 \%$ .

### **Pitanja za razmišljanje:**

-Što trebamo mjeriti da bi odredili ubrzanje sile teže? (To pitanje pitamo prije pokusa)

-Ovisi li period titranja o amplitudi? (Ne)

**Upotreba pokusa u nastavi:** Ovaj pokus je osmišljen kao istraživački demonstracijski pokus. U ovom pokusu je bitno istaknuti da smo kartonski valjak s mobitelom objesili na dvije niti, a ne na jednoj, da bi njihanje bilo što pravilnije i da ne bi došlo do zakretanja njihala. Ovaj pokus učenici mogu napraviti kod kuće kao kućni projekt ili u razredu u manjim grupama.

#### 4.4. Prigušeno titranje

**Pokus:** Gušenje u tekućinama

**Pribor:** Elastična opruga, uteg, stalak, boca širokog grla, voda, mlijeko, vinski ocat, ulje, prozirna vrećica, spajalica za papir, savitljiva žica, pametni telefon Samsung Galaxy S3.

**Opis pokusa:** Objesimo elastičnu oprugu na stalak i na nju “prikopčamo“ prozirnu vrećicu u koju stavimo mobitel. Za tu prozirnu vrećicu pomoću spajalice i savitljive bakrene žice spojimo/objesimo uteg. Preko prozirne vrećice upalimo mobilnu aplikaciju *Phyphox* i uđemo u Acceleration (without g). Uteg uronimo u bocu s tekućinom, izvučemo iz ravnotežnog položaja te pustimo da titra. U tom trenutku kliknemo znak za start i nakon nekoliko sekundi (vremenska odgoda pokusa se može namjestiti) počinje snimanje titranja.

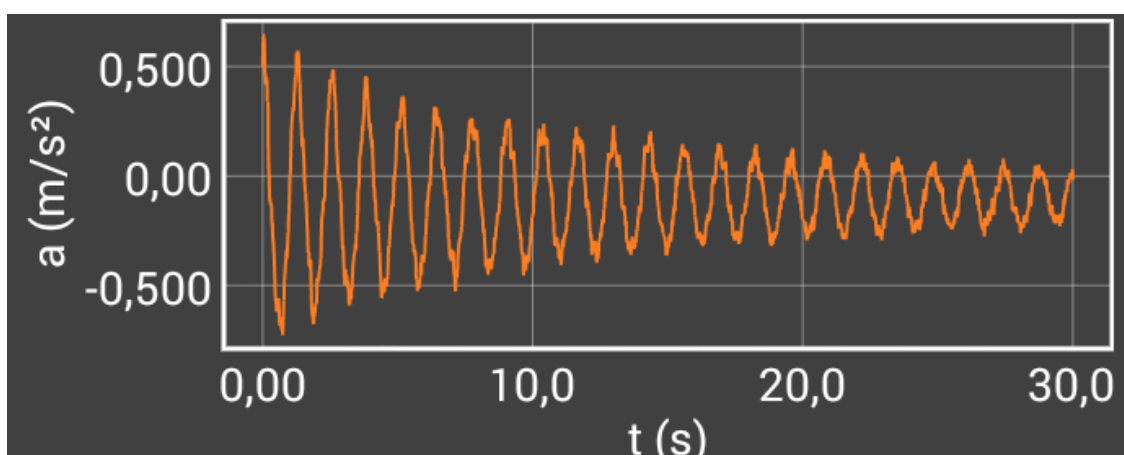
Uteg uronimo u četiri različite tekućine i pustimo da titra te promatramo kako će se titranje gušiti u pojedinoj tekućini. Tekućine u kojima ćemo promatrati prigušenje su: voda, mlijeko, vinski ocat i ulje. Treba paziti da uteg prilikom titranja ne udara o stijenke boce, kako se titranje ne bi dodatno prigušivalo.



Slika 33: Eksperimentalni postav za prigušeno titranje u tekućini



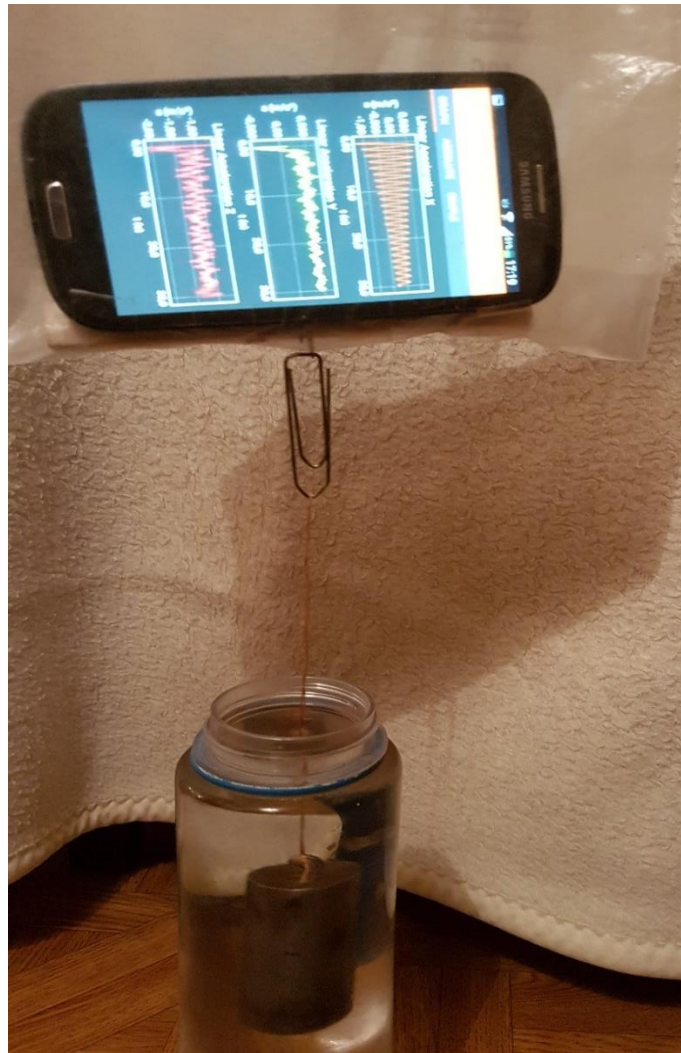
Slika 34: Prigušenje titranja u mlijeku



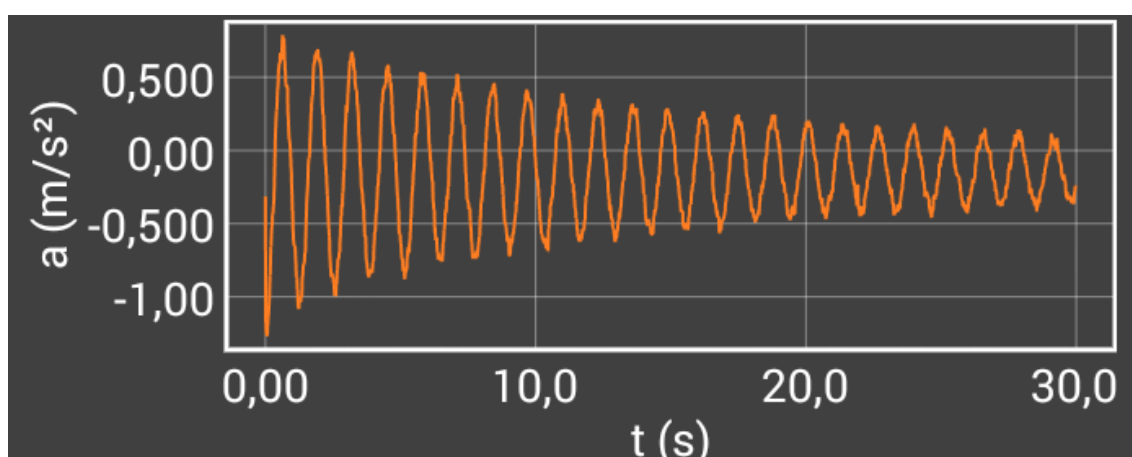
Slika 35: Uvećani prikaz prigušenja u mlijeku

Da bi uteg prestao titrati u mlijeku trebalo je proći 37 s.





Slika 36: Prigušenje titranja u vodi

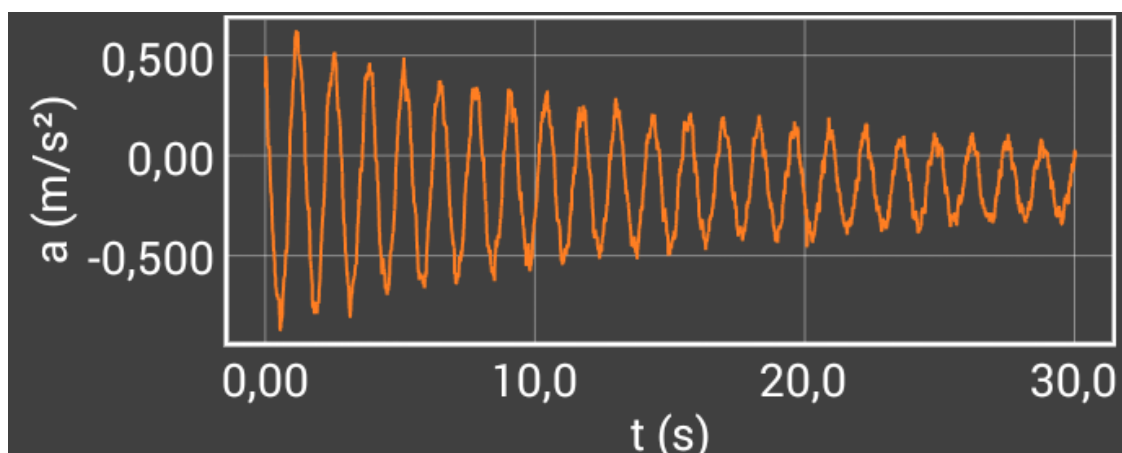


Slika 37: Uvećani prikaz prigušenja u vodi

Da bi uteg prestao titrati u vodi trebalo je proći 66 s.

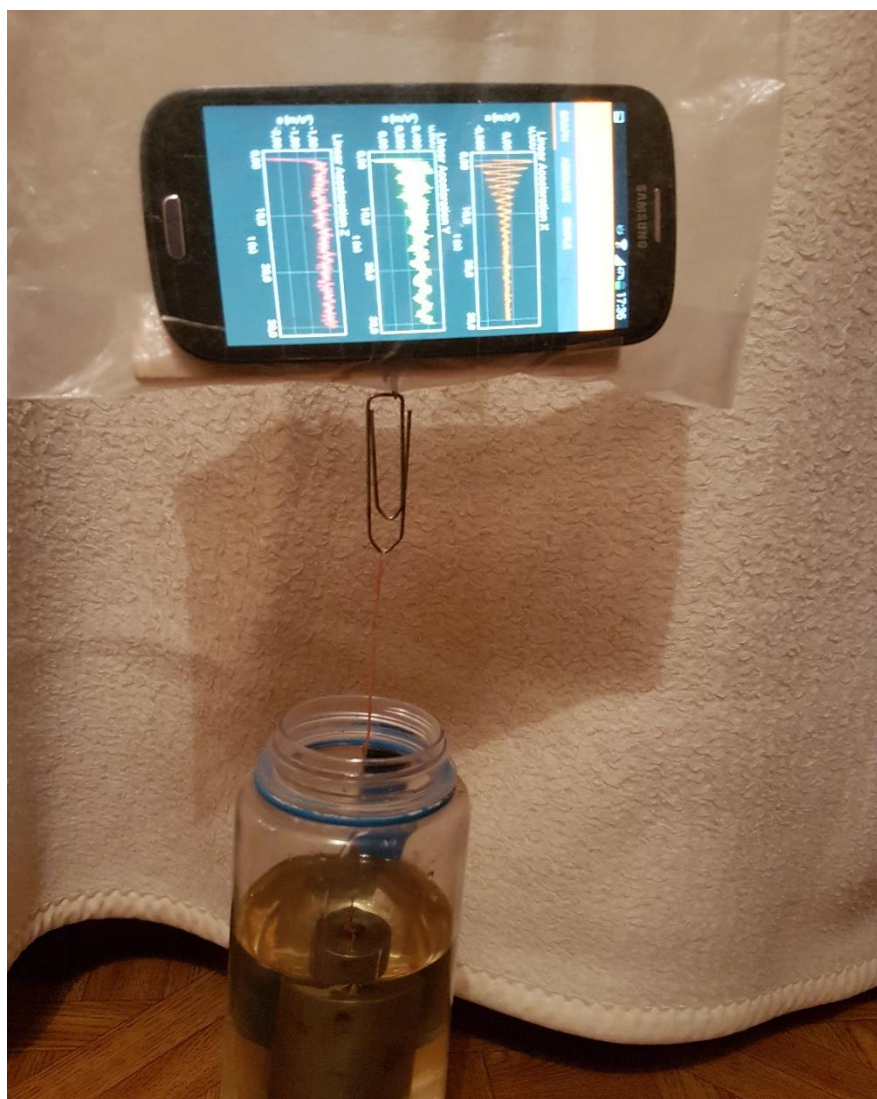


Slika 38: Prigušenje titranja u vinskom octu

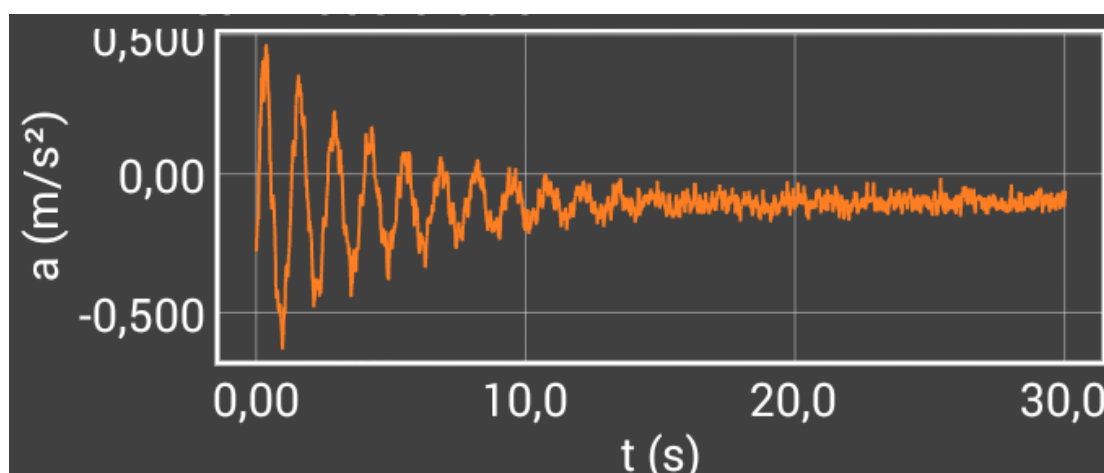


Slika 39: Uvećani prikaz prigušenja u vinskom octu

Da bi uteg prestao titrati u vinskom octu trebalo je proći 78 s.



Slika 40: Prigušenje titranja u biljnom ulju



Slika 41: Uvećani prikaz prigušenja titranja u biljnom ulju

Da bi uteg prestao titrati u biljnom ulju trebalo je proći 15 s.



Prvo uđemo u mobilnu aplikaciju *Phyphox* i pokrenemo eksperiment Acceleration (without g). U postavkama u gornjem desnom kutu (znak okomite tri točkice) uzmemo vremenski interval od 30 s kako bi promatrali „tempo“ prigušenja, tj. je li gušenje jače ili slabije. Kasnije štopericom mjerimo koliko je utegu trebalo vremena da prestane titrati u pojedinoj tekućini.

U tablici 1 usporedili smo vremena potrebna utegu da se umiri u određenoj tekućini, tj. da se titranje zaustavi. Da bi se odredila pogreška mjerenja, svako mjerenje treba izvesti 10 puta.

Tekućina u kojoj uteg titra	Vrijeme potrebno da se titranje zaustavi
Mlijeko	37 s
Voda	66 s
Vinski ocat	78 s
Biljno ulje	15 s

Tablica 1: Prigušenje titranja utega u pojedinim tekućinama

Prigušenje titranja je najjače u biljnom ulju, zatim u mlijeku i vodi, a najslabije u vinskom octu. Vidimo da se amplitude titranja utega smanjuju u vremenu što smo i očekivali budući da tekućine u kojima uteg titra predstavljaju otpor titranju. Najbrže opadanje amplituda u vremenu primijetili smo kod biljnog ulja, a najsporije kod vinskog octa. Prigušenje u tekućinama ne ovisi samo o gustoći tekućine nego i o njenoj viskoznosti. Na primjer ako usporedimo ulje i vodu vidimo da je prigušenje u ulju koje je manje gustoće od vode brže zbog viskoznosti ulja.

### Pitanja za razmišljanje:

-Što mislite, u kojoj tekućini će se titranje utega najbrže gušiti, a u kojoj najsporije? Ponuđene tekućine: Mlijeko, voda, vinski ocat, biljno ulje. (Pitati prije izvođenja pokusa)

-Slažu li se vaša očekivanja s dobivenim rezultatima?

-Zašto je u ulju gušenje najveće?

**Upotreba pokusa u nastavi:** Ovaj pokus je istraživački demonstracijski pokus. Za izvođenje pokusa u školi potrebno je prije sata pripremiti četiri iste boce širokog grla u kojima se nalaze različite tekućine. Treba pripaziti da uteg prilikom titranja ne udara o stijenke boce kako se titranje ne bi dodatno prigušivalo.

#### 4.5. Prisilno titranje

**Pokus:** Pobuđivanje titranja jednostavnih njihala.

**Pribor:** Drveni štap, vezica za cipele, konac, metalna kuglica, željezne matice za vijke, dva stolca (u ulozi stalka).

**Opis pokusa:** Namjestili smo drveni štap s pričvršćenim njihovima između dva stolca koja su poslužila kao stalak (slika 42). Pomoću niza jednostavnih njihala promatrat ćemo prisilne titraje. Mase njihala su male i čine ih željezne matice za vijke. Vanjsku silu predstavlja pobudno njihalo na kojem visi metalna kuglica čija je masa puno veća od mase ostalih njihala.



Slika 42: Eksperimentalni postav

U početku su sva njihala u stanju mirovanja. Njihalo na kojem visi kuglica izvučemo iz ravnotežnog položaja i pustimo da titra. Ostala njihala na kojem vise željezne matice za vijke će početi titrati. Sustav titra pod utjecajem vanjske sile. Kada smo zatitrali njihalo s kuglicom, došlo je do prijenosa energije između njihala sa željeznim maticama.

Promatrajući titranje pojedinih njihala, vidjeli smo da njihala s jednakom duljinom titraju u fazi. Najveću amplitudu ima njihalo koje ima istu duljinu kao i njihalo s kuglicom tako da možemo reći da je takvo njihalo u rezonanciji s pobudnim njihalom (slika 43). Najmanjom amplitudom titra njihalo koje ima najmanju duljinu. Ono njihalo čija je duljina jednaka duljini njihala s kuglicom će titrati jednakom frekvencijom kao njihalo na kojem visi kuglica.



Slika 43: Njihala jednake duljine titraju najvećom amplitudom

**Pitanja za razmišljanje:**

-Što uočavate? Kako titraju njihala sa željeznim maticama?

-Što mislite, o čemu bi mogla ovisiti frekvencija titranja pojedinog njihala? (O duljini njihala)

-Što utječe na amplitudu titranja pojedinog njihala? (Duljina njihala i frekvencija izvora pobude)

**Upotreba pokusa u nastavi:**

Ovaj pokus je osmišljen kao frontalni demonstracijski pokus. Izvodi ga nastavnik pred cijelim razredom. Bilo bi dobro pozvati učenike da se približe kako bi svi dobro vidjeli pokus. Važno je uočiti da njihalo koje ima istu duljinu s pobudnim njihalom ima najveću amplitudu i da titraju u fazi.

## 5. Zaključak

Tradicionalna nastava fizike u našim školama se pretežno bazira na suhoparnom predavanju gradiva od strane profesora i rješavanju numeričkih zadataka, a premalo pažnje se pridaje pokusima. Fizika je prirodna znanost koja se temelji na pokusu. Zato pokus treba biti bitnom sastavnicom svakog nastavnog procesa. Nastavni proces će biti uspješno proveden ukoliko učenik stekne trajna i praktična znanja koja će mu koristiti u daljnjem životu. Tradicionalni oblici nastave polako se zamjenjuju različitim oblicima istraživački orijentirane i projektne nastave. Projektna nastava omogućuje učenicima samostalno istraživanje, analiziranje i donošenje zaključaka.

U današnje vrijeme gotovo svi posjeduju pametne telefone. Korištenje pametnih telefona je omogućilo ljudima razne mogućnosti brzog i lakog otkrivanja novih informacija i puno bržu komunikaciju s ljudima širom svijeta. Razmišljao sam na koji način bih mogao upotrijebiti pametni telefon u nastavi fizike i pronašao mobilne aplikacije koje mi u tome mogu pomoći. Ovaj rad je dokaz kako se sa jeftinim i lako dostupnim priborom mogu napraviti kvalitetni i jednostavni pokusi. Suvremene metode koje sam koristio u ovom radu su mobilne aplikacije korištene za izvedene fizikalne pokuse i projektna nastava bazirana na istraživanju.

Razvoj digitalnih tehnologija omogućava još veću kreativnost i inventivnost u osmišljavanju demonstracijskih pokusa uz mogućnost prikupljanja kvantitativnih podataka uz relativno nisku cijenu. Najviše od svega, ovim radom želim pokazati kako se na interesantan i moderan način mogu demonstrirati bitni fizikalni koncepti.

## 6. Literatura

- [1] Cutnell, J. D. , Johnson, K. , Physics - 8th edition, Hoboken , 2009.
- [2] Planinić, J. , Osnove fizike 1, Školska knjiga, Zagreb, 2005.
- [3] Paar, V., Fizika 3, udžbenik za treći razred gimnazije, Školska knjiga, Zagreb, 2009.
- [4] Brković, N., Fizika 3, udžbenik za treći razred gimnazije, Luk, Zagreb, 2004.
- [5] Labor, J. , Fizika 3, udžbenik za 3. razred gimnazije, Alfa, Zagreb, 2007.
- [6] Larmer, J. , Mergendoller, J. , Boss, Setting the standard for project based learning, California, 2015.
- [7] Krsnik, R. , Mikuličić, B. , Fizika 3, udžbenik za treći razred gimnazije, Školska knjiga, Zagreb, 1995.
- [8] Sony Corporation, Motion Shot 2.1.9, (2014.), <raspoloživo na: <https://www.apkmirror.com/apk/sony-corporation/motion-shot/motion-shot-2-1-9-2-release/motion-shot-2-1-9-android-apk-download/>>, [ 14 .2. 2018. ].
- [9] Phyphox, Smartphone-Experiment:Pendulum(en), (2017.), <raspoloživo na: [https://www.youtube.com/watch?time\\_continue=180&v=xY3NFcDG3ZU](https://www.youtube.com/watch?time_continue=180&v=xY3NFcDG3ZU)>, [14 .2. 2018.].
- [10] Phyphox, Smartphone-Experiment:Spring oscillator (en), (2017.), <raspoloživo na: <https://www.youtube.com/watch?v=VbL4IInVAO4>>, [14 .2. 2018.].
- [11] RWTH Aachen University, (2017.), Phyphox, <raspoloživo na: [https://play.google.com/store/apps/details?id=de.rwth\\_aachen.phyphox&hl=hr](https://play.google.com/store/apps/details?id=de.rwth_aachen.phyphox&hl=hr)>, [14 .2. 2018.].
- [12] Vernić, E. , Mikuličić, B., Vježbe iz fizike, Školska knjiga, Zagreb, 2014.
- [13] Lambros, A. (2002). Problem-based learning in middle and high school classrooms: A teacher's guide to implementation. Thousand Oaks, CA: Corwin Press